

# Лекция 14. Построение эпюр в статически неопределимых системах. Методы расчета.

## Особенности статически неопределимых систем и методы их расчета

**Статически неопределимые балки и рамы** – конструкции, в которых уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций и внутренних усилий. Число связей, наложенных на статически неопределимую систему, больше того количества связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции. Такими связями могут быть как опорные связи, так и стержни самой конструкции. Будем рассматривать **балки** и **простые рамы**, то есть такие конструкции, в которых связями, обеспечивающими геометрическую неизменяемость, являются опорные закрепления (опорные связи). Для обеспечения геометрической неизменяемости балки (рамы) в плоскости достаточно трех связей. Каждая связь запрещает какое-то перемещение. Шарнирно-подвижная опора запрещает перемещение по направлению, перпендикулярному плоскости опирания, и является одной связью. Шарнирно-неподвижная опора делает невозможными линейные перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям (вертикальному и горизонтальному) и соответствует двум связям, наложенным на конструкцию. Наконец, при наличии жесткого защемления на конце стержня становятся невозможными все перемещения: и вертикальное, и горизонтальное, и угол поворота, поэтому жесткое защемление представляет собой три связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость балки (рамы). Каждая дополнительная связь сверх трех для плоских систем превращает конструкцию в статически неопределимую. Такие дополнительные связи, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции, называются **лишними**.

Оговоримся, что здесь и далее понятие “расчет” подразумевает только построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимая система ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой оказывается более жесткой.

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.

3. Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии, не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой геометрически неизменяемой системе, в то время как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:

1. Метод сил. При расчете по **методу сил** основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. Знание усилий в лишних связях позволит по методу

сечений выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы.

2. Метод перемещений. При расчете по *методу перемещений* основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы.

3. Метод конечных элементов. При расчете по *методу конечных элементов* система разбивается на простые *конечные элементы* и по матрице жесткости элемента и системы в целом устанавливается связь между перемещениями узлов элемента и системы и усилиями в них.

4. Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

5. Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

Кроме указанной классификации, методы расчета статически неопределимых систем можно расчленить по степени их точности, по области работы материала сооружений, по особенностям расчетных операций и т.д.

По степени точности различают *точные* и *приближенные* методы расчета.

*Точные методы* базируются на обычных основных допущениях, принятых при расчете достаточно жестких сооружений (закон Гука, расчет по деформированной схеме, принцип сложения действия сил). *Приближенные методы* расчета, кроме обычных упрощений, используют дополнительные допущения, что обуславливает заметное отклонение от результатов точных методов расчета.

По области работы материала различают расчет сооружений в *упругой стадии* и расчет сооружений *за пределом упругости*. По особенностям расчетных операций методы расчета можно разделить на *вычислительные* и *экспериментальные*.

## Степень статической неопределимости системы

Перед расчетом статически неопределимой конструкции необходимо сначала определить *степень статической неопределимости* рассматриваемой системы. Для балок и простых рам степень статической неопределимости равна числу лишних опорных связей. В каждой связи возникает опорная реакция, поэтому степень статической неопределимости можно найти, сосчитав разность между количеством неизвестных опорных реакций и числом независимых уравнений статики.

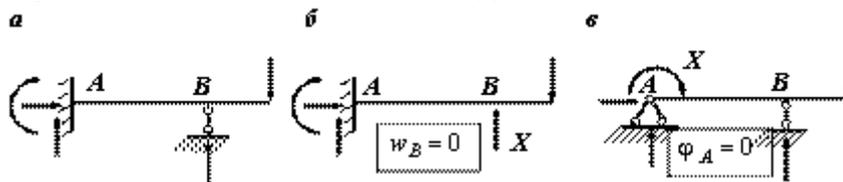


Рис.1

Например, балка на рис. 1, а является один раз статически неопределимой, так как имеет 4 связи и 4 неизвестные опорные реакции, а количество независимых уравнений равновесия – 3. В раме, показанной на рис. 3, а, число наложенных связей и опорных реакций в них равно 5, и эта рама является дважды статически неопределимой. Если в один из стержней балки (рамы) врезан шарнир, то количество связей уменьшается на единицу, так как становится возможным взаимный поворот сечений, примыкающих к шарниру.

Появляется дополнительное уравнение для определения опорных реакций: "изгибающий момент в шарнире равен нулю" или можно сказать по-другому: "сумма моментов всех сил, расположенных слева (или справа) от шарнира, равна нулю". Так, балка с врезанным в точке  $E$  шарниром, показанная на рис. 2,  $a$ , является один раз статически неопределимой: от 5 опорных связей надо вычесть одну связь, связанную с наличием дополнительного шарнира в точке  $E$ . Из четырех оставшихся связей одна является лишней. Можно сосчитать степень статической неопределимости этой балки и иначе: для определения пяти опорных реакций можно составить четыре уравнения статики (дополнительное уравнение "изгибающий момент в шарнире  $E$  равен нулю"). Разность между числом реакций и количеством уравнений статики равна единице, то есть балка один раз статически неопределима.

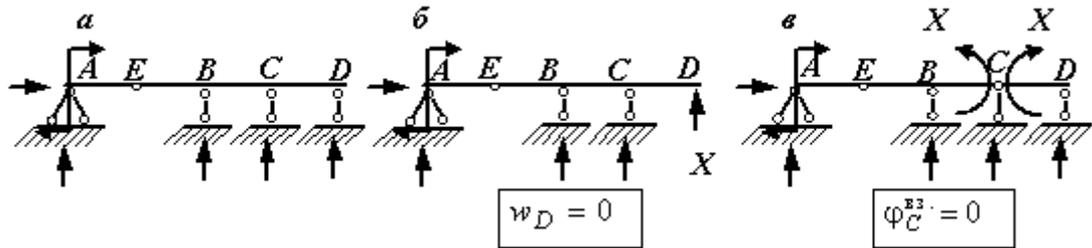


Рис.2

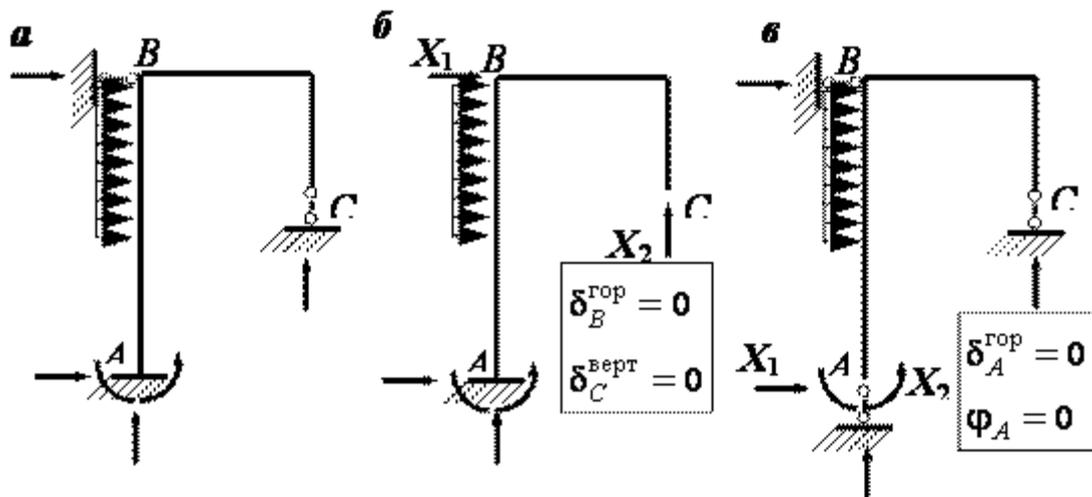


Рис.3

Следует различать *внешне статически неопределимые* и *внутренне статически неопределимые* системы.

**Внешне статически неопределимой** называют такую систему, которая имеет только лишние внешние связи, т.е. лишние опорные закрепления. Примером внешне статически неопределимой плоской системы является трехпролетная рама (рис. 4).

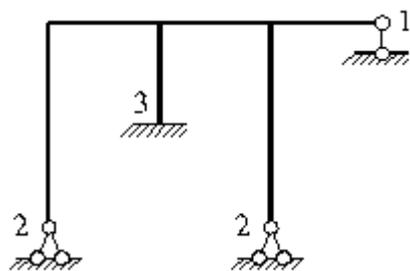


Рис.4

Степень статической неопределимости внешне статически неопределимой системы  $S$  легко установить путем вычитания из общего числа опорных

стержней  $m$  количество независимых уравнений равновесия  $n$ , которое может быть составлено для данной системы (одно – для одномерных; три – для плоских и шесть – для пространственных систем).

$$S = m - n \quad (14.1)$$

Для плоской рамы, изображенной на рис.4, учитывая, что защемление эквивалентно трем опорным стержням, получаем:

$$m = 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 8; \quad S = m - n = 8 - 3 = 5,$$

т.е. данная система 5 раз статически неопределима.

**Внутренне статически неопределимой** называют систему, обладающую лишними связями, введенными для взаимного соединения частей системы.

Двухопорная рама с затяжкой (рис. 5, а) внутренне один раз статически неопределима. Статически определимая система (рис. 5, б) получена из заданной (рис. 5, а) путем разрезания затяжки  $ab$ . И при этом взаимодействие частей затяжки заменяется только одной неизвестной осевой силой  $N_1$ . Следовательно, в статически определимой системе, изображенной на рис. 5, б имеем одно лишнее неизвестное  $N_1$ , которое невозможно определить при помощи метода сечений. Поэтому заданная система (рис. 5, а) является один раз статически неопределимой.

Если затяжку жестко заделать в стойки, как это показано на рис. 6, а, то получим трижды статически неопределимую систему.

Действительно, в данном случае после разрезания нижнего ригеля  $ab$ , взаимодействие частей  $ac$  и  $bc$  характеризуется уже тремя неизвестными усилиями  $N_1, Q_1, M_1$  (рис.6, б), которые нельзя определить из условия равновесия. Поэтому система, изображенная на рис. 6, а является три раза внутренне статически неопределимой.

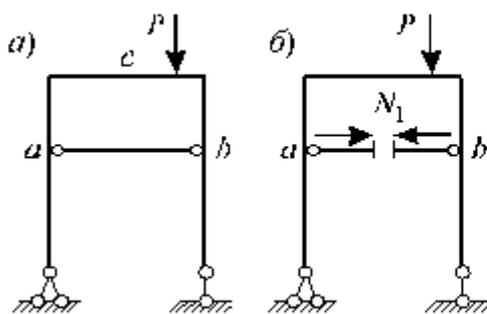


Рис.5

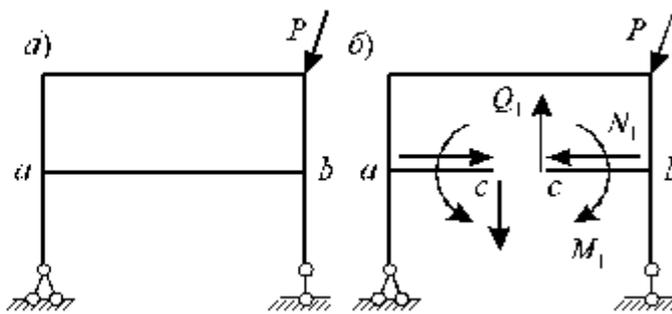


Рис.6

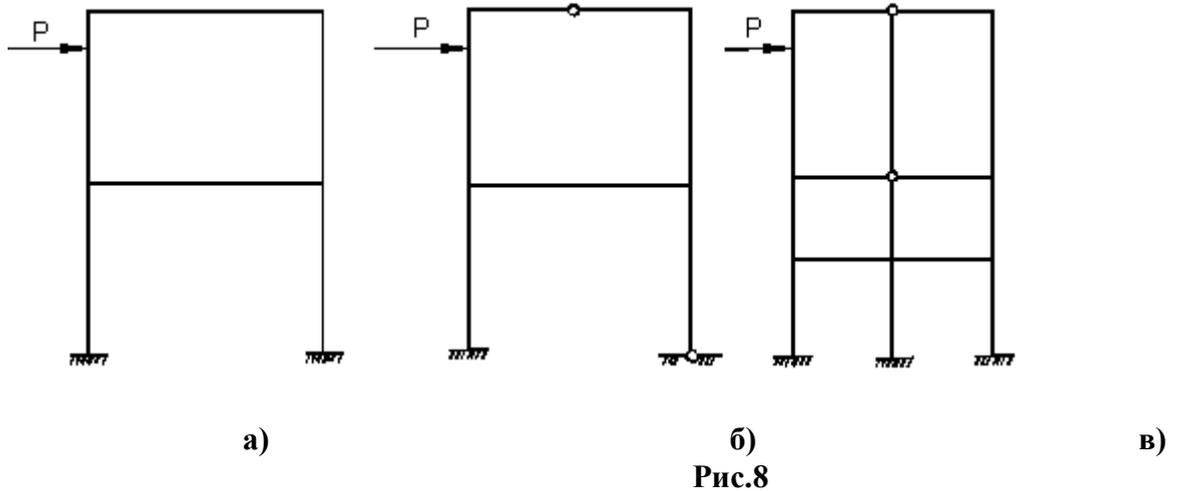
Отсюда можно сделать вывод, что в плоских системах, замкнутый бесшарнирный контур имеет три лишние связи. Следовательно, если плоская система содержит  $n$  замкнутых контуров, то она, очевидно, будет  $3n$  раз статически неопределима.

На рис. 7 показана плоская рама, имеющая в первом (а) случае три внешние связи, а во втором случае (б) – пять. Значит, в первом случае рама имеет необходимое для статической определимости количество внешних связей, а во втором же – две дополнительные внешние связи. Однако в обеих ситуациях рама статически неопределима, т.к. конфигурация ее такова, что не позволяет определить усилия во всех ее элементах, используя только уравнения равновесия. Следовательно, для окончательного ответа на вопрос о статической определимости системы необходимо проведение совместного анализа наложенных на систему внешних и внутренних связей.



Рис. 7

Рассмотрим другие рамы, которые содержат замкнутые контуры (рис.8).



Первая рама (рис.8,а) имеет шесть простых внешних связей при трёх необходимых для плоской системы. Следовательно, система имеет  $L = 6 - 3 = 3$  лишние внешние связи. Система имеет один замкнутый контур  $K = 1$ , который имеет три лишние внутренние простые связи, т.е. трижды статически неопределим. Следовательно, степень статической неопределимости системы  $n = L + 3K = (6 - 3) + 3 \cdot 1 = 6$ . Вторая рама (рис.8, б) имеет пять внешних простых связей при трёх необходимых. Следовательно,  $L = 5 - 3 = 2$  и система внешним образом дважды статически неопределима. Система имеет два замкнутых контура  $K = 2$ , каждый из которых трижды статически неопределим, следовательно, внутренним образом система  $3K = 3 \cdot 3 = 6$  шесть раз была бы статически неопределима, если бы не было внутреннего шарнира. Последний соединяет три стержня ( $m = 3$ ) и поэтому даёт системе  $(m - 1) = 3 - 1 = 2$  степени свободы. Таким образом, степень свободы статической неопределимости второй рамы можно вычислить по общей формуле:

$$n = L + 3K - Ш_0,$$

где  $Ш_0$  – число простых врезанных шарниров,  $K$  – число замкнутых контуров,  $L$  – число лишних внешних связей.

В результате получаем:  $n = (5 - 3) + 3 \cdot 2 - 2 = 6$ .

Третья рама (рис.8, в) имеет  $L = 9 - 3 = 6$ ,  $K = 4$ ,  $Ш_0 = 2 + 3 = 5$ , следовательно,  $n = 6 + 3 \cdot 4 - 5 = 13$ .

Отметим, что степень статической неопределимости стержневой системы и её степень свободы связаны равенством  $n = -N$ .

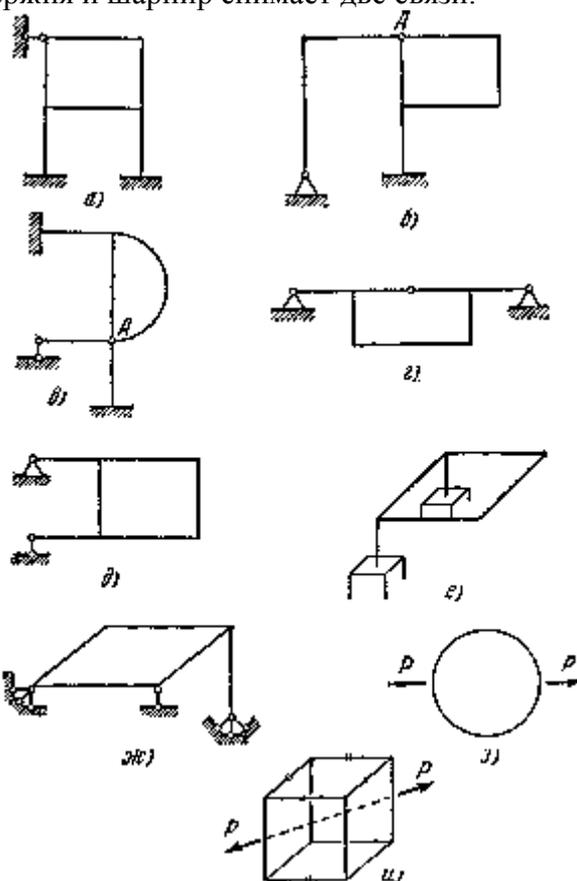
Рассмотрим еще несколько примеров определения степени статической неопределимости стержневых и рамных систем. На рис. 9 показано несколько рам. Последовательно рассмотрим их.

а) Рама имеет четыре дополнительные внешние связи и три взаимные связи, т. е. семь раз статически неопределима.

б) Полагаем сначала, что шарнир  $A$  отсутствует. Тогда имеются две внешние и три внутренние дополнительные связи. Система без шарнира  $A$  была бы пять раз статически неопределимой.

Шарнир  $A$  принадлежит одновременно трем стержням. Его можно рассматривать как два совпавших шарнира. Так как каждый шарнир снимает одну связь, т. е. разрешает поворот одного сечения относительно другого, то можно сказать, что шарнир  $A$  снимает две связи. Система становится, таким образом, вместо пяти — три раза статически неопределимой.

Обобщая сказанное, можно сделать вывод, что шарнир снимает число связей, на единицу меньшее числа сходящихся в нем стержней. В данном случае в шарнире  $A$  сходятся три стержня и шарнир снимает две связи.



**Рис.9.** Примеры рамных статически неопределимых конструкций:

- а) статически неопределимая — семь, б) — три, в) — четыре, г) — три, е) — двенадцать, ж) — семь, и) — тридцать раз статически неопределима

в) Если бы шарнир  $A$  отсутствовал, система была бы четыре раза внешним образом и три раза внутренним образом статически неопределимой, т.е. всего семь раз. Шарнир  $A$  снимает число связей, на единицу меньшее числа сходящихся в нем стержней, т.е. три связи. Рама четыре раза статически неопределима.

г) Рама три раза статически неопределима.

д) Внешние связи не удовлетворяют условиям кинематической неизменяемости. Это — механизм, точнее говоря, мгновенный механизм. Система имеет возможность поворачиваться относительно верхней опоры как жесткое целое. Понятно, что угол поворота будет небольшим. Нижняя связь заклинится и будет достигнуто какое-то положение равновесия, но новое положение связей будет зависеть от жесткости системы. К раме неприменимы основные принципы сопротивления материалов: принцип неизменности начальных размеров и принцип независимости действия сил.

е) Рама — пространственная. Имеется шесть дополнительных внешних связей (лишняя заделка) и шесть дополнительных взаимных связей (замкнутый контур). Система 12 раз статически неопределима.

ж) Система семь раз статически неопределима (один раз внешним образом и шесть раз — внутренним).

з) Здесь для плоской рамы не показаны внешние связи, но дана система внешних сил, удовлетворяющая условиям равновесия. В таком случае условились считать, что

дополнительных внешних связей нет, и положение рамы в пространстве считается определенным; рассматриваются только внутренние связи. Система три раза статически неопределима.

и) Здесь также рассматриваются только внутренние связи, поскольку система указанных внешних сил удовлетворяет условиям равновесия. Нужно подсчитать, сколько сечений необходимо сделать в раме, чтобы, с одной стороны, она не «рассыпалась», а с другой, чтобы в ней не осталось ни одного замкнутого контура. Таких сечений следует сделать пять (см. рис. 9, и). Система 30 раз статически неопределима.

## **Метод сил**

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является **метод сил**. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, при указанном способе решения неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

### **Алгоритм расчета методом сил**

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Сформировать эквивалентную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
9. Решить систему канонических уравнений, т.е. определить реакции лишних связей.
10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры).
11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.

Отметим, что пункты 7, 8, 11 приведенного алгоритма не являются безусловно необходимыми, хотя и позволяют контролировать правильность выполнения расчета. А для систем с одной лишней связью пункты 7 и 8 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

Остановимся подробнее на некоторых из вышеперечисленных этапов расчета.

### **Выбор основной системы**

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название **основной системы**. После того как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую, необходимо ввести вместо связей неизвестные силовые факторы, которые принято называть **лишними неизвестными**. В тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы. Там, где запрещены угловые смещения, вводятся моменты. Как в том, так и в другом случае неизвестные силовые факторы будем обозначать  $X_i$ , где  $i$  — номер неизвестного.

Наибольшее значение  $i$  равно степени статической неопределимости системы. Заметим, что для внутренних связей силы  $X_i$  — являются взаимными. Если в каком-либо сечении рама разрезана, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются как к правой, так и к левой частям системы.

Основную систему с приложенными к ней лишними неизвестными  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и внешней нагрузкой  $P$  называют **эквивалентной системой** при условии, что её действительные перемещения согласуются с наложенными на исходную систему связями. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 10, а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 10, б, в), однако их должно объединять следующее условие — основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

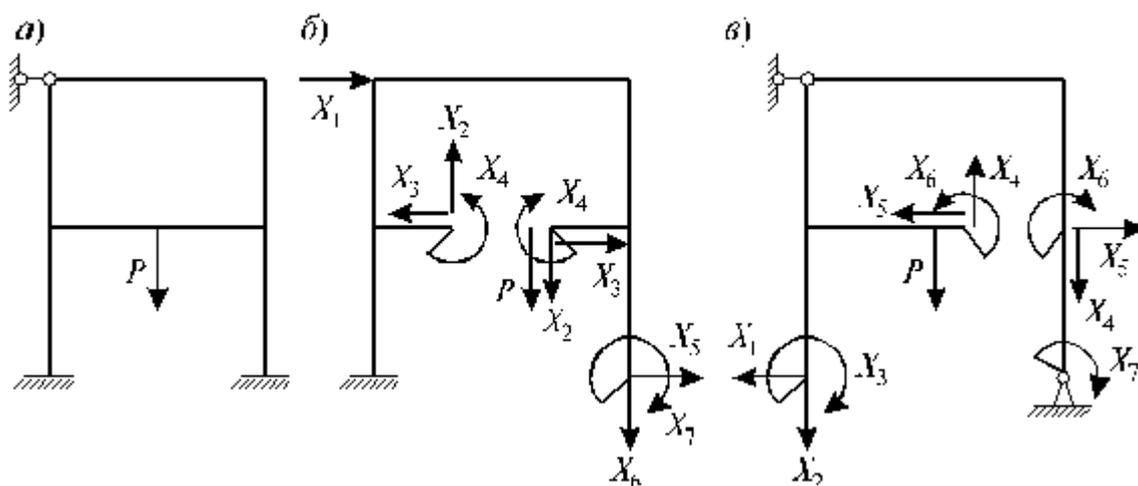


Рис. 10

Выбор основной системы (ОС) является непростым. Неудачный выбор ОС может привести к значительной трудоемкости решения, а иногда и к грубой ошибке. Нельзя руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей должно быть равным степени статической неопределимости. Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. Некоторые связи отбрасывать недопустимо. При выборе основной системы надо следить кроме всего прочего и за геометрической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

Например, для рамы, показанной на рис. 11, можно предложить основные системы, а), б),..., которые получены путем отбрасывания семи дополнительных связей в различных комбинациях. Вместе с тем нужно помнить, что не всякая система с семью отброшенными связями может быть принята как основная. На рис. 12 показано три примера для той же рамы, в которой также отброшено семь связей, однако сделано это неправильно, так как оставшиеся связи не обеспечивают кинематической неизменяемости системы (рис.12, а, б), с одной стороны, и статической определимости во всех узлах,— с другой (рис.12, в).

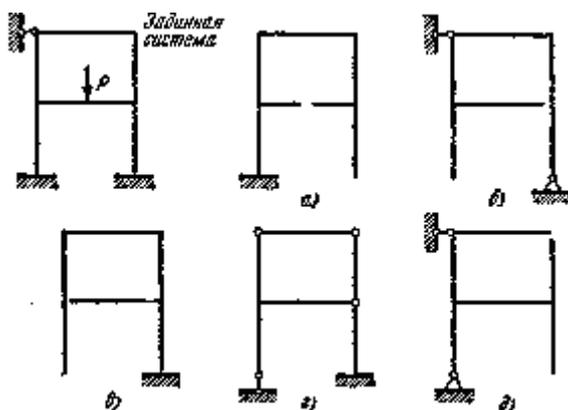


Рис.11

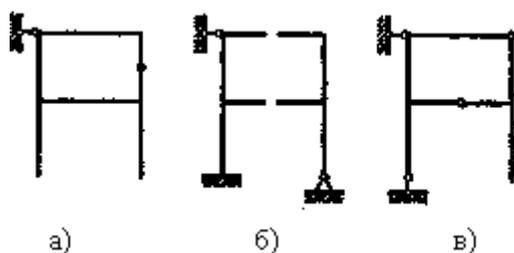


Рис.12

Рассмотрим возможные способы удаления лишних связей, что и определяет вид основной системы.

1. Отбрасывание лишних связей осуществляется полным удалением некоторых опор или их заменой опорами с меньшим числом связей. Реакции, действующие в направлениях отброшенных связей, являются лишними неизвестными. На рис.13, б, в, г показаны различные варианты эквивалентной системы, полученные этим способом для рамы (рис.13, а).

2. Постановка шарниров в промежуточных сечениях стержней позволяет в каждом таком сечении установить связь, соответствующую изгибающему моменту. Эти моменты являются лишними неизвестными. Для рамы, имеющей степень статической неопределимости  $n = 3$  (рис.14, а), при выборе основной системы необходимо поставить три шарнира. Положение этих шарниров может быть произвольным, но удовлетворяющим требованию геометрической неизменяемости системы (рис.14, б).

3. Рассечение стержня устраняет три связи, соответствующие внутренним усилиям  $M, Q, N$  (рис.14, в). В частных случаях (рис.14, г) рассечение стержня по шарниру освобождает две связи (рис.14, д), а рассечение прямолинейного стержня с шарнирами по концам – одну связь (рис.14, е).

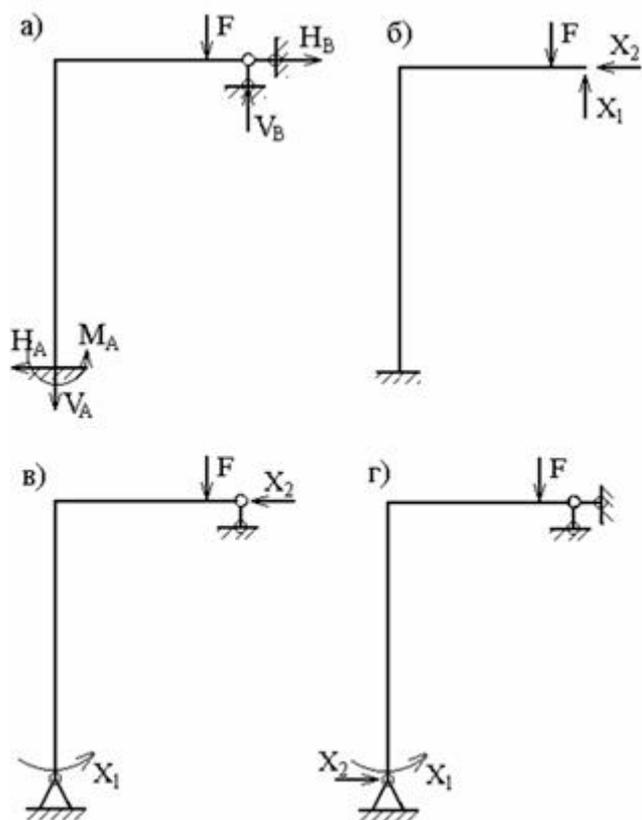


Рис. 13

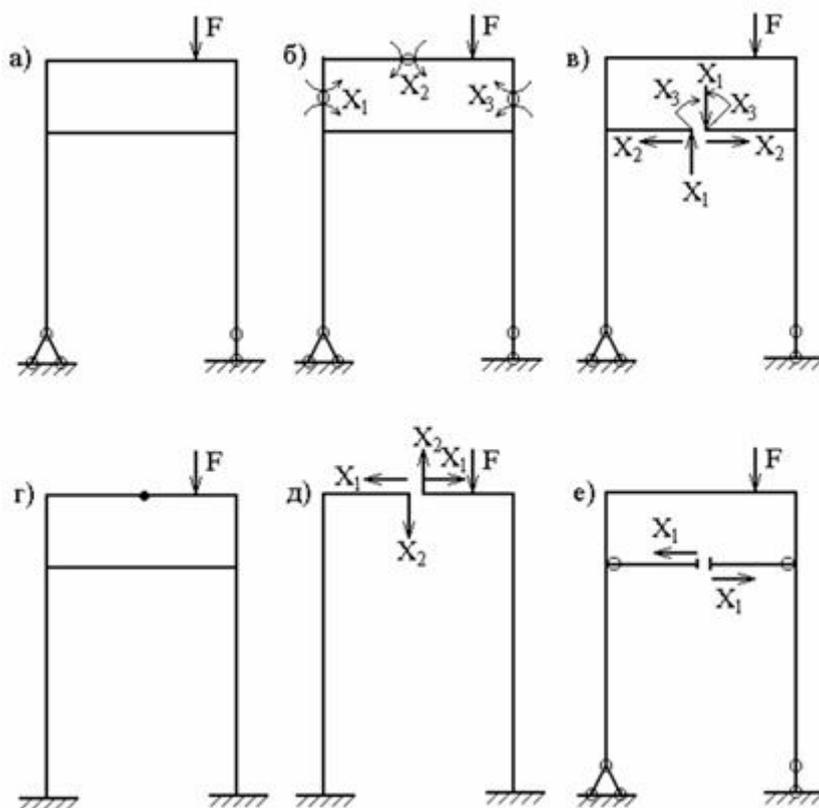


Рис. 14

Среди связей статически неопределимой системы различают абсолютно необходимые и условно необходимые. К абсолютно необходимым относятся связи, при удалении которых система становится геометрически изменяемой. Для абсолютно

необходимой связи характерна статическая определенность усилия в ней, т.е. реакция такой связи может быть вычислена из условия равновесия. При выборе основной системы абсолютно необходимые связи отбрасывать нельзя.

Связи, при удалении которых система продолжает оставаться геометрически неизменяемой, называются условно необходимыми. Система, у которой удалили такую связь, может являться основной системой метода сил.

Отметим, что преобразование заданной системы в статически определенную не является обязательным. Иногда используется модификация метода сил, в которой основная система может быть статически неопределимой, однако изложение этого вопроса выходит за рамки этой лекции. Устранение каких-либо связей не изменяет внутренние усилия и деформации системы, если к ней приложить дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Значит, если к основной системе приложить заданную нагрузку и реакции удаленных связей, то основная и заданная системы станут *эквивалентными*.

### Канонические уравнения метода сил

В заданной системе по направлениям имеющихся жестких связей, в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе, перемещений быть не может, поэтому и в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны равняться нулю. А для этого реакции отброшенных связей должны иметь строго определенные значения.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой  $i$ -ой связи из  $n$  отброшенных на основании принципа независимости действия сил имеет вид:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{im} + \Delta_{iF} = 0, \quad (14.2)$$

где первый индекс означает направление перемещения и номер отброшенной связи, а второй указывает на причину, вызвавшую перемещение, т.е.  $\Delta_{ik}$  - это перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное реакцией  $k$ -ой связи;  $\Delta_{iF}$  - перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное одновременным действием всей внешней нагрузки.

В методе сил реакцию  $k$ -ой связи принято обозначать через  $X_k$ . С учетом этого обозначения и в силу справедливости закона Гука перемещения  $\Delta_{ik}$  можно представить в виде:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad (14.3)$$

где  $\delta_{ik}$  - единичное (или удельное) перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное реакцией  $X_k = 1$  т.е. реакцией, совпадающей по направлению с  $X_k$ , но равной единице.

Подставляя (14.3) в (14.2), получим:

$$\Delta_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0 \quad (14.4)$$

Физический смысл уравнения (14.4): перемещение в основной системе по направлению  $i$ -ой отброшенной связи равно нулю.

Записывая выражения, аналогичные (14.4), для всей совокупности отброшенных связей, получим систему канонических уравнений метода сил:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0 \\ \dots & \\ X_1 \delta_{m1} + X_2 \delta_{m2} + \dots + X_n \delta_{mn} + \Delta_{mp} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

Здесь  $\delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx$  – единичные перемещения;  $\bar{M}_i, \bar{M}_k$  – моменты от единичных сил, приложенных в направлении неизвестных  $X_i, X_k$ ;  $EI$  – изгибная жесткость. Обобщенные перемещения  $\Delta_{ip} = \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx$  называются грузовыми перемещениями;  $\bar{M}_i$  – изгибающий момент, вызываемый  $i$ -й единичной силой;  $M_p$  – изгибающий момент, который вызван системой внешних сил.

Единичные перемещения делятся на главные, расположенные по главной диагонали и имеющие одинаковые индексы ( $\delta_{ii}$ ), и побочные ( $\delta_{ik}, i \neq k$ ). Главные перемещения всегда положительные, в отличие от побочных. Симметрично расположенные перемещения в соответствии с теоремой о взаимности перемещений равны друг другу, т.е.  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ , это свойство называется законом **парности коэффициентов** при неизвестных.

Вид уравнения (14.5), т.е. количество слагаемых в каждом из них и их общее число, определяется только степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

### **Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений**

Этому этапу расчета предшествует построение единичных и грузовых эпюр внутренних силовых факторов (для балок и рам – эпюр изгибающих моментов). Единичные эпюры строятся от действия безразмерной единичной силы или безразмерного единичного момента, совпадающих по направлению с направлением соответствующей лишней неизвестной в эквивалентной системе, и обозначаются через  $\bar{X}_i$ , а единичная эпюра – через  $\bar{M}_i$ .

Грузовая эпюра строится от внешней нагрузки, приложенной к основной системе. При этом можно строить одну эпюру от одновременного действия всех внешних нагрузок или несколько эпюр, отдельно от каждой из приложенных нагрузок. Такое разбиение одной грузовой эпюры на несколько более простых, как правило, целесообразно только тогда, когда среди действующих нагрузок есть равномерно распределенная, и эпюра моментов на соответствующем участке под ней является знакопеременной. При этом в каждом каноническом уравнении число свободных членов будет равно числу построенных грузовых эпюр.

Единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены канонических уравнений) в общем случае можно вычислить методом Мора. Для балок и рам это можно сделать при помощи правила Верещагина.

При вычислении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил, кроме непосредственного интегрирования

$\delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx$  и  $\Delta_{ip} = \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx$  применяют различные упрощенные приемы вычисления интегралов. Особенно обстоятельно они разработаны для рам с прямолинейными стержнями постоянного сечения. Жесткость  $EI = \text{const}$  при этом выносится за знак интеграла, а под интегралом остается произведение двух функций:  $M_i$  и  $M_k$ , одна из которых, как правило, или обе являются линейными функциями. Операция интегрирования здесь часто называется перемножением эпюр и ее символически изображают следующим образом:

$$\frac{1}{EI} \int_a^b M_1 M_2 dx = M_1 \otimes M_2 \quad (14.6)$$

здесь знак  $\otimes$  означает умножение в смысле формулы Мора.

Применение готовых формул показано в таблице 14.1. Сами эти формулы без труда определяются элементарными методами. Эта таблица является весьма универсальной, так как она пригодна для определения перемещений по двум любым прямолинейным эпюрам, а также криволинейной с прямолинейной. Если любая из фигур, приведенных в табл. 14.1, перемножается с треугольником, то это перемножение сводится к трапеции, одна из ординат которых равна 0. При перемножении на прямоугольник нужно учесть, что  $M_a = M_b$ .

При помощи расчленения эпюр на части можно добиться того, чтобы при перемножении участвовали эпюры простой структуры, приведенные в таблице 14.1.

Таблица 14.1

$M_2(x)$ $M_1(x)$							
	$abl$	$\frac{al}{2}(b+c)$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{2abl}{3}$
	$\frac{bl}{2}(a+d)$	$\frac{l(ab+cd)}{6} + \frac{l(a+d)(b+c)}{6}$	$\frac{bl}{6}(2a+d)$	$\frac{bl}{4}(a+d)$	$\frac{bl}{12}(5a+3d)$	$\frac{bl}{12}(3a+d)$	$\frac{bl}{3}(a+d)$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{bl}{6}(2b+c)$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{3}$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{bl}{4}(b+c)$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{5abl}{12}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{al}{12}(3b+5c)$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{11abl}{30}$	$\frac{2abl}{15}$	$\frac{7abl}{15}$
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{al}{12}(b+3c)$	$\frac{abl}{12}$	$\frac{17abl}{48}$	$\frac{2abl}{15}$	$\frac{abl}{30}$	$\frac{abl}{5}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{al}{3}(b+c)$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{7abl}{15}$	$\frac{abl}{5}$	$\frac{8abl}{15}$

Например, пусть нужно перемножить эпюры, приведенные на рис. 6.11. Каждую из эпюр можно представить в виде суммы: в первом случае, в виде двух треугольных и параболической; во втором – в виде двух треугольных.

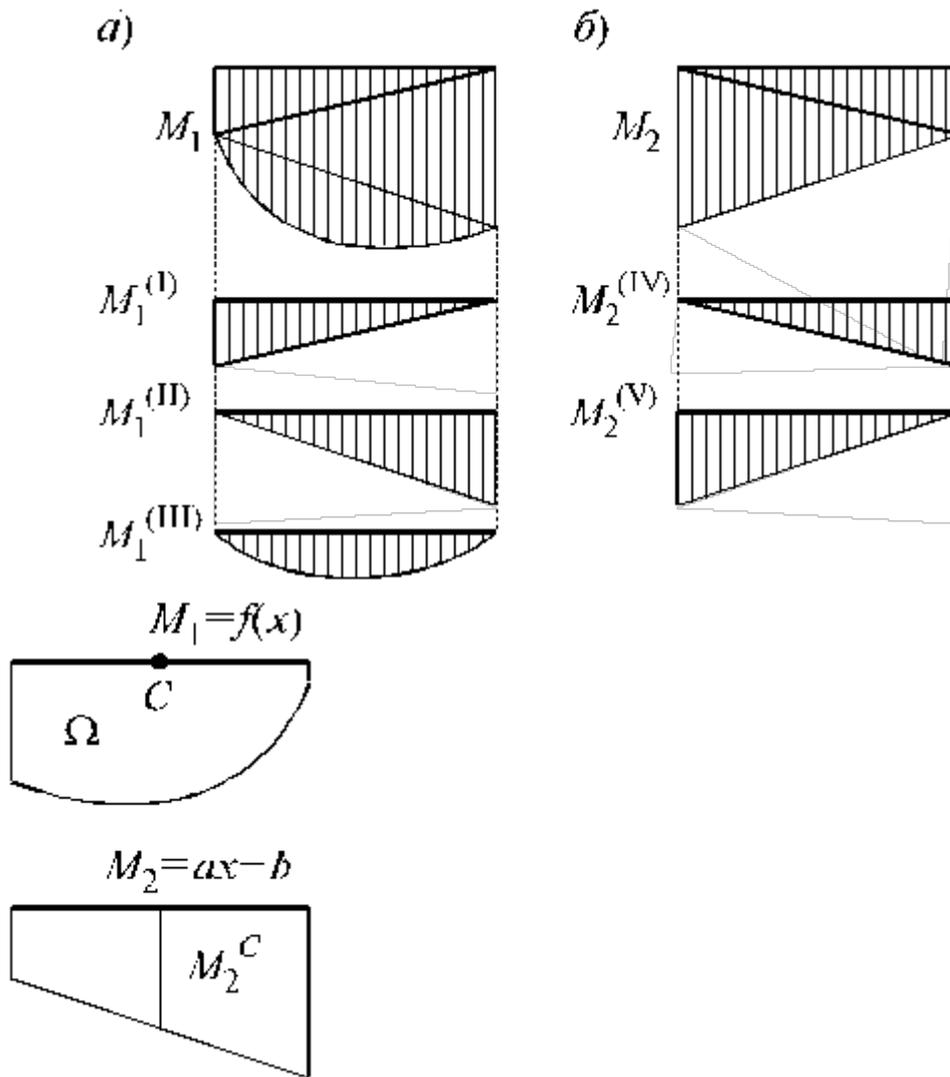


Рис. 15

Рис.

16

Итак,  $M_1 = M_1^{(I)} + M_1^{(II)} + M_1^{(III)}$ ;  $M_2 = M_2^{(IV)} + M_2^{(V)}$   
 Тогда  $M_1 \otimes M_2 = (M_1^{(I)} + M_1^{(II)} + M_1^{(III)}) \otimes (M_2^{(IV)} + M_2^{(V)}) = M_1^{(I)} \otimes M_2^{(IV)} +$   
 $+ M_1^{(II)} \otimes M_2^{(IV)} + M_1^{(III)} \otimes M_2^{(IV)} + M_1^{(I)} \otimes M_2^{(V)} + M_1^{(II)} \otimes M_2^{(V)} +$   
 $+ M_1^{(III)} \otimes M_2^{(V)}$

А далее следует воспользоваться формулой для вычисления интегралов  $\int_0^l M_1(x)M_2(x)dx = M_1 \otimes M_2$ , приведенных в таблице 14.1.

Довольно удобным способом перемножения эпюр является **способ Верещагина**. Этот способ применим в случае когда из двух перемножаемых эпюр одна как минимум является прямолинейной. Если одна из эпюр является криволинейной вычисляется площадь  $\Omega$  криволинейной эпюры, которая умножается на ординату под ее центром тяжести, взятую в прямолинейной эпюре  $M_2^C$  (рис.16).

Предположим  $M_1 = f(x)$ ;  $M_2 = ax + b$ , тогда

$$\int_0^l M_1(x)M_2(x)dx = M_1 \otimes M_2 = \int_0^l f(x) \cdot (ax+b)dx = b \int_0^l f(x)dx + \int_0^l x \cdot f(x)dx$$

$$\int_0^l f(x)dx = \Omega$$

но величина  $\int_0^l x \cdot f(x)dx = S$  представляет собой площадь криволинейной эпюры, а

величина  $\int_0^l x \cdot f(x)dx = S$  – статический момент площади этой эпюры относительно левого конца стержня. Следовательно,

$$M_1 \otimes M_2 = b\Omega + aS = \Omega \left( b + a \frac{S}{\Omega} \right)$$

Известно, что величина  $\frac{S}{\Omega}$  представляет собой ординату центра тяжести

криволинейной эпюры, а  $b + a \cdot \frac{S}{\Omega} = x_c = \frac{S}{\Omega}$  – значение  $M_2$  при

В случае двух криволинейных эпюр способ Верещагина неприменим. Надо пользоваться интегралом Мора. Способ Верещагина применим также в тех случаях, когда одна из эпюр не криволинейная, а ломаная.

В таблице 14.2 приведены формулы для определения площади  $\Omega$ , положения центра тяжести  $z_c$  и ординаты  $u_c$  в центре тяжести для некоторых довольно распространенных плоских фигур.

В случае, когда имеются эпюры общего вида (например, обе эпюры криволинейные, либо трапеции, рис.16), разбиение уже на два равных интервала дает согласно формуле Симпсона точное выражение интеграла:

$$M_1 \otimes M_2 = \frac{l}{6} (M_{1,A}M_{2,A} + 4M_{1,B}M_{2,B} + M_{1,C}M_{2,C})$$

где индексы  $A$  и  $C$  относятся к сечениям расположенным на концевых сечениях интервала длиной  $l$ , а индекс  $B$  к срединному сечению того же интервала.

В тех случаях, когда функции  $M_1$  и  $M_2$  в рассматриваемом интервале длиной  $l$ , являются линейными и известны их значения в концевых сечениях интервала, то формулу перемножения  $M_1$  и  $M_2$  можно преобразовать в следующем виде:

$$M_1 \otimes M_2 = \frac{l}{6} (2M_{1,A}M_{2,A} + M_{1,A}M_{2,C} + M_{1,C}M_{2,A} + 2M_{1,C}M_{2,C}) \tag{14.7}$$

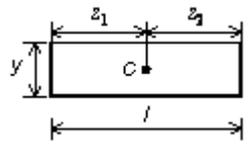
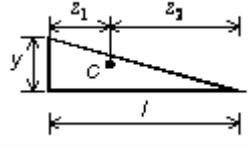
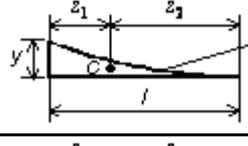
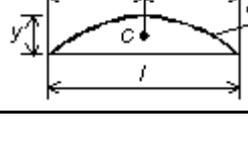
Итак, после составления и решения канонической системы уравнений метода сил (14.5) мы получаем значения  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , т.е. значения усилий в лишних связях. Затем строим для основной системы эпюры изгибающих моментов от каждого из найденных усилий. Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, все ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных.

Сложив по характерным сечениям (на протяжении всей рассчитываемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил  $X_i$  с ординатами грузовой эпюры, получим окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

Таблица

14.2

№№	Фигура	Площадь	Абсциссы центра тяжести	
			$z_1$	$z_2$

1		$yl$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
2		$\frac{yl}{2}$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$
3		$\frac{yl}{3}$	$\frac{1}{4}l$	$\frac{3}{4}l$
4		$\frac{2}{3}yl$	$\frac{3}{8}l$	$\frac{5}{8}l$
5		$\frac{2}{3}yl$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

### Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Для выполнения универсальной проверки необходимо построить суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  - эпюру моментов от одновременного действия всех единичных сил, приложенных к основной системе:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$$

Перемножим суммарную единичную эпюру с эпюрой  $\bar{M}_i$ :

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_s}{EI} ds &= \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}. \end{aligned}$$

Таким образом, результат перемножения суммарной и  $i$ -ой единичной эпюр - это перемещение по направлению  $i$ -ой связи от совместного действия единичных лишних неизвестных. Это перемещение равно сумме коэффициентов  $i$ -го канонического уравнения:

$$\delta_{ss} = \int_s \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (14.8)$$

Такая проверка называется построчной и выполняется для каждого канонического уравнения.

Вместо  $n$  построчных проверок чаще всего выполняется одна - универсальная проверка, которая состоит в перемножении суммарной единичной эпюры самой на себя и проверке условия:

$$\delta_{ss} = \int_s \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (14.9)$$

Если универсальная проверка выполняется, значит единичные перемещения вычислены правильно; если нет – необходимо выполнить построчные проверки, что позволит уточнить перемещение, при вычислении которого допущена ошибка.

Для выполнения проверки грузовых перемещений необходимо перемножить суммарную единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds &= \int_s \frac{M_F}{EI} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int_s \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_2 M_F}{EI} ds + \dots + \int_s \frac{\bar{M}_n M_F}{EI} ds = \\ &\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}. \end{aligned}$$

Таким образом, проверка свободных членов системы канонических уравнений (14.5) состоит в выполнении условия:

$$\Delta_{sF} = \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (14.10)$$

### **Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов**

Окончательные эпюры можно построить двумя способами.

Так как при найденных значениях лишних неизвестных  $X_i$  выполняются условия совместности деформаций, то из расчета основной системы можно получить все искомые внутренние усилия заданной системы. На основании принципа независимости действия сил для изгибающих моментов получим:

$$M = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + M_F,$$

или, учитывая, что

$$M_1 = \bar{M}_1 X_1; M_2 = \bar{M}_2 X_2, \dots, M_n = \bar{M}_n X_n,$$

приходим к выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_F. \quad (14.11)$$

Аналогично определяется продольные и поперечные силы:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_F = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_F, \quad (14.12)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_F = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_F. \quad (14.13)$$

Второй способ основан на том, что в результате вычисления реакций лишних связей  $X_i$  исходная статически неопределимая система приведена к статически определимой системе, нагруженной внешними нагрузками и реакциями лишних связей. Поэтому окончательные эпюры внутренних силовых факторов можно построить для эквивалентной системы, вычислив предварительно (и то не всегда) из условий равновесия опорные реакции последней.

Недостатком первого способа является то обстоятельство, что для его реализации необходимо дополнительно построить эпюры  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $Q_F$ ,  $N_F$ , которые не используются в расчете методом сил и поэтому не были построены ранее.

В связи с этим для построения окончательных эпюр более рациональным представляется второй способ, а условие (14.11) можно использовать в качестве дополнительной проверки.

### Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов

Эта проверка выполняется в двух вариантах: статическая и кинематическая.

При статической проверке, выполняемой обычно для рам, вырезаются узлы и записываются условия их равновесия под действием узловых сосредоточенных моментов и изгибающих моментов на концах стержней. Эта проверка является вспомогательной и выполняется автоматически при правильных эпюрах изгибающих моментов в основной системе и при выполнении кинематической проверки.

Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$  состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних нагрузок и внутренних усилий – должна быть равна нулю.

Основной проверкой окончательной эпюры моментов в методе сил является кинематическая проверка, которая может быть построчной или универсальной.

При построчной проверке каждая единичная эпюра моментов  $\bar{M}_i$  перемножается с окончательной эпюрой моментов  $M$ :

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds &= \int_s \frac{\bar{M}_i}{EI} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F) ds = \\ &= \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1 X_1}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2 X_2}{EI} ds + \dots + \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n X_n}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} ds = \\ \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате перемножения каждой единичной эпюры с окончательной эпюрой моментов получим ноль:

$$\Delta_i = \int_s \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.14)$$

Вариантом построчной проверки является проверка по замкнутому контуру, состоящая в том, что сумма приведенных (т.е. деленных на жесткость соответствующего стержня или его участка) площадей эпюры  $M$ , находящихся внутри каждого замкнутого бесшарнирного контура, должна быть равна сумме приведенных площадей, находящихся снаружи этого контура.

Суммируя выражения типа (14.14) для всех  $n$ , получим выражение, служащее для универсальной кинематической проверки окончательной эпюры изгибающих моментов:

$$\Delta_s = \int_s \frac{\bar{M}_s M}{EI} ds = 0, \quad (14.15)$$

т.е. результат перемножения суммарной единичной и окончательной эпюр моментов должен быть равен нулю.

Формулу (14.15) можно интерпретировать следующим образом: условное перемещение эквивалентной, или, что то же самое, заданной системы по направлению всех неизвестных от действия всех неизвестных и внешних нагрузок, равно нулю.

#### Пример 1.

Пусть требуется провести расчет плоской рамы (рис. 17, а) методом сил в следующей последовательности:

1. Определение степени статической неопределимости;
2. Выбор основной системы;
3. Составление системы канонических уравнений;
4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений;
5. Проверка правильности подсчета коэффициентов канонических уравнений;
6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности;
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$ ;

8. Проверка правильности построения эпюры  $M_{ок}$  и построение эпюры  $Q(z)$ ;
9. Построение эпюры  $N$ ;
10. Статическая и деформационная проверка рамы в целом.

***Решение.***

*1. Определение степени статической неопределимости*

Используя зависимость (14.1) подсчитаем степень статической неопределимости системы. Количество опорных стержней  $m = 5$ , количество уравнений равновесия  $n = 3 \rightarrow S = m - n = 5 - 3 = 2$ , следовательно, система дважды статически неопределима, или, другими словами, имеет две лишние связи.

*2. Выбор основной системы*

Известно, что основная система определяется из заданной путем отбрасывания лишних связей и приложением соответствующих усилий, возникающих в отброшенных связях в заданной системе. При этом основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

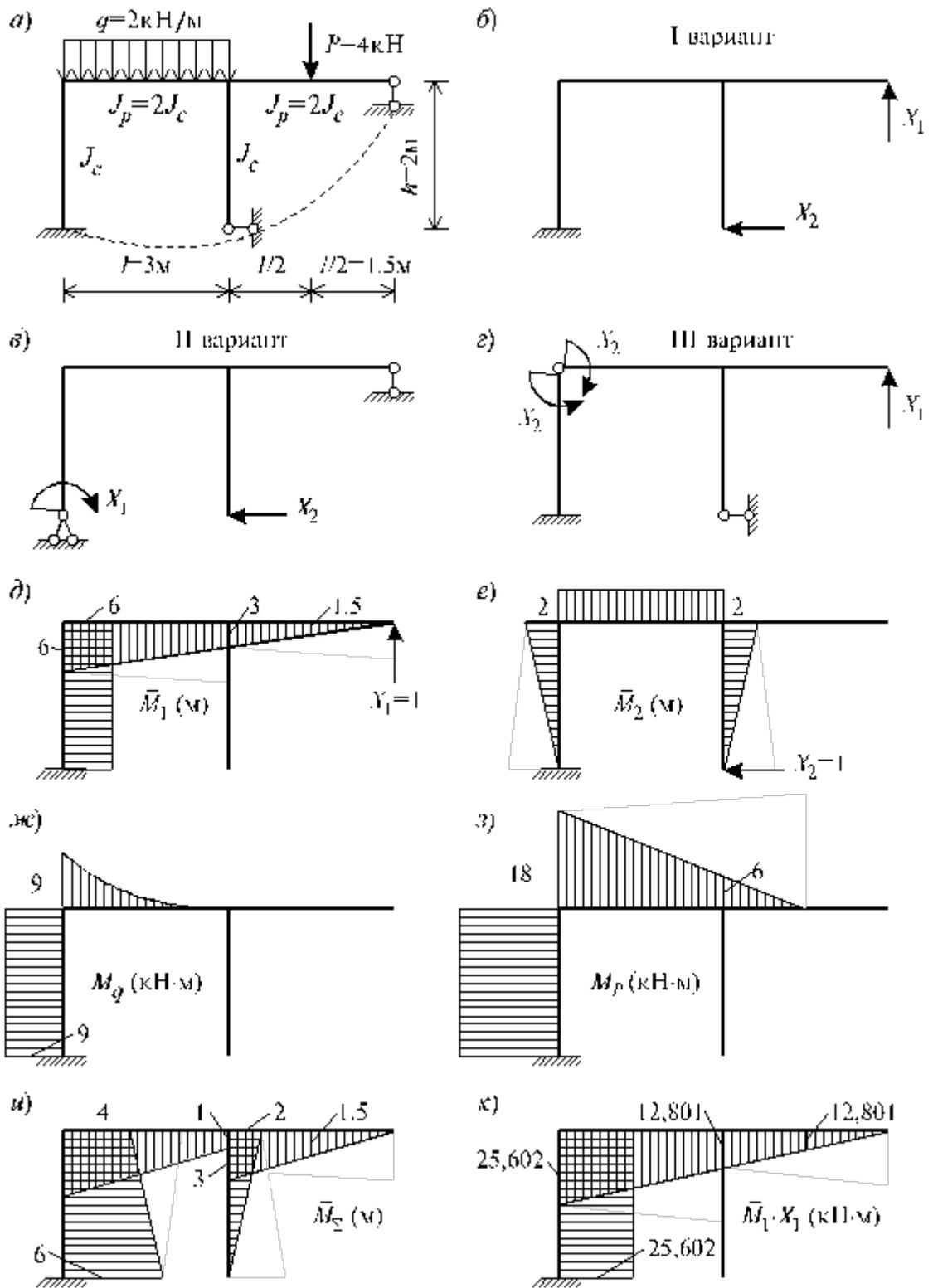


Рис. 17

Сравнивая три варианта основных систем (рис.17, б –17, з) приходим к выводу, что наиболее целесообразно в качестве основной системы выбрать I–ый вариант (рис. 17, б), так как в этом случае:

- не требуется предварительное вычисление опорных реакций;
- эпюры изгибающих моментов, построенные в этой схеме от воздействия на нее каждого из усилий  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $P$  и  $q$ , будут распространены на меньшем количестве

участков системы и представлены простейшими геометрическими фигурами. Это значительно облегчает процесс определения коэффициентов канонических уравнений.

### 3. Составление системы канонических уравнений

Канонические уравнения, необходимые для решения статически неопределимых задач, представляют собой уравнения совместности деформаций. Число их всегда равно степени статической неопределимости. Физический смысл каждого из канонических уравнений, как было указано выше, состоит в том, что суммарное перемещение по направлению усилий  $X_i$  от всех действующих в основной системе силовых факторов, включая и неизвестные, равно 0, так как в действительности в этих направлениях стоят связи, препятствующие возникновению перемещений по направлению этих неизвестных.

Для рассматриваемого случая канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} + \Delta_{1q} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_{2q} = 0. \end{cases} \quad (14.16)$$

### 4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений

Так как все коэффициенты канонических уравнений представляют собой перемещения, то для их вычисления вначале строят единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе. Затем по формуле Мора с применением готовых формул (см. табл.6.1) или правила Верещагина с использованием табл.14.2 определим их значения.

Эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе от воздействия на нее каждого в отдельности усилия  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$ ;  $P$  и  $q$ , показаны на рис. 17,  $\partial - 17, з$ .

Исходя из единичных и грузовых эпюр определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_c} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{108}{EI_c}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= -\frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = -\frac{25,5}{EI_c}; \\ \delta_{22} &= 2 \cdot \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EI_p} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{11,333}{EI_c}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI_c} \cdot 18 \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3}{6} \cdot [2 \cdot (6 \cdot 18 + 3 \cdot 6) + 3 \cdot 18] - \\ &- \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3}{2 \cdot 6} \cdot [2 \cdot 3 \cdot 6 - \frac{3}{2} \cdot 6] = -\frac{307,125}{EI_c}; \\ \Delta_{1q} &= -\frac{1}{EI_c} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 9 - \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3 \cdot 9}{2} \cdot (3 \cdot 6 + 3) = -\frac{131,625}{EI_c}; \\ \Delta_{2P} &= \frac{1}{EI_c} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{18+6}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{72}{EI_c}; \\ \Delta_{2q} &= \frac{1}{EI_c} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{27}{EI_c}. \end{aligned}$$

### 5. Проверка правильности подсчета коэффициентов

Правильность расчета коэффициентов канонических уравнений осуществляется путем универсальных проверок, при этом должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \sum \delta = \delta_{ss}; \\ \sum \Delta = \Delta_{sPq}. \end{cases}$$

где  $\sum \delta$  – сумма всех найденных главных и побочных коэффициентов:

$$\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22};$$

$\delta_{ss}$  – величина, полученная в результате умножения единичной суммарной эпюры  $M_{\Sigma}$  на себя:

$$\delta_{ss} = \sum_{j=1}^k \int \frac{M_{\Sigma}^j M_{\Sigma}}{EI_j} dx;$$

$\sum \Delta$  – величина, определяемая сложением значений, полученных в результате умножения эпюры  $M_{\Sigma}$  на эпюру  $M_P$  и эпюры  $M_{\Sigma}$  на эпюру  $M_Q$ ;  $k$  – количество участков эпюры.

Эпюра  $M_{\Sigma}$  (рис. 17, *u*) строится в основной системе от одновременного воздействия на нее всех неизвестных единичных усилий ( $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$ ), т.е. путем сложения единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$ :

$$M_{\Sigma} = (M_1 + M_2).$$

В нашем случае

$$\left. \begin{aligned} \sum \delta &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{108}{EI_c} - \frac{25,5}{EI_c} - \frac{25,5}{EI_c} + \frac{11,333}{EI_c} = \frac{68,333}{EI_c}; \\ \delta_{ss} &= \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{2}{6} [2 \cdot (6 \cdot 6 + 4 \cdot 4) + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6] + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3}{6} [2 \cdot (4 \cdot 4 + 1 \cdot 1) + \\ &+ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4] + \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{68,333}{EI_c}; \\ \sum \delta &= \delta_{ss} \\ \sum \Delta &= \Delta_{1P} + \Delta_{1Q} + \Delta_{2P} + \Delta_{2Q} = -\frac{307,125}{EI_c} - \frac{131,625}{EI_c} + \frac{72}{EI_c} + \frac{27}{EI_c} = \\ &= -\frac{339,75}{EI_c}; \\ \Delta_{sPQ} &= -\frac{1}{EI_c} \cdot \frac{6+4}{2} \cdot 2 \cdot 18 - \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3}{6} [2 \cdot (4 \cdot 18 + 1 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 18] - \\ &- \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{1 \cdot 5}{6} \cdot 6 \cdot (2 \cdot 3 + \frac{3}{2}) - \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{6+4}{2} \cdot 2 \cdot 9 - \\ &- \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{3 \cdot 9}{12} \cdot (3 \cdot 4 + 1) = -\frac{339,75}{EI_c}; \\ \sum \Delta &= \Delta_{sPQ}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, оба условия удовлетворяются. Следовательно, коэффициенты канонических уравнений рассчитаны верно.

*6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности*

Подставив в систему уравнений значения коэффициентов канонических уравнений, получим:

$$\begin{cases} 108X_1 - 25,5X_2 - 307,125 - 131,625 = 0; \\ -25,5X_1 + 11,333X_2 + 72 + 27 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения неизвестных:  
 $X_1 = 4,267$  кН;  $X_2 = 0,865$  кН.

Правильность вычисления неизвестных проверим путем подстановки найденных значений  $X_1$  и  $X_2$  в исходные уравнения:

$$108 \cdot 4,267 - 25,5 \cdot 0,865 - 438,750 = 460,836 - 460,808 \approx 0;$$

$$-25,5 \cdot 4,267 + 11,333 \cdot 0,865 + 99 = -108,808 + 108,803 \approx 0.$$

### 7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$  в характерных сечениях заданной системы целесообразно подсчитать в табличной форме (табл.14.3), предварительно пронумеровав все характерные сечения и задавшись правилом знаков изгибающих моментов (рис.18, б).

Окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_{ок}$  для заданной системы строим в соответствии с принципом независимости действия сил путем сложения «исправленных» эпюр  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  с грузовыми эпюрами  $M_P$  и  $M_q$ , которые построены в основной системе:

$$M_{ок} = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_P + M_q.$$

«Исправленные» эпюры изгибающих моментов  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  строим путем умножения всех ординат единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, на значения  $X_1$  и  $X_2$  с учетом их знака. Построенные таким образом эпюры  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  приведены на рис. 17, к и рис. 18, а.

Таблица 14.3

Номер сечения	$M_1 X_1$ , Нм	$M_2 X_2$ , кНм	$M_P$ , кНм	$M_q$ , кНм	$M_{ок}$ , кНм
0	25,602	0	-9,0	-18,0	-1,398
1	25,602	-1,73	-9,0	-18,0	-3,128
2	25,602	-1,73	-9,0	-18,0	-3,128
3	12,801	-1,73	0	-6,0	5,071
4	0	-1,73	0	0	-1,730
5	0	0	0	0	0
6	12,801	0	0	-6,0	6,801
7	6,400	0	0	0	6,400
8	6,400	0	0	0	6,400
9	0	0	0	0	0

Так как на участке 2–3 эпюра  $M_{ок}$  (рис. 18, в) криволинейна, то для уточнения ее очертания необходимо найти экстремальное значение изгибающего момента. Для этого рассмотрим элемент 2–3, вырезанный из статически неопределимой системы. На этот ригель действует равномерно распределенная нагрузка  $q = 2$  кН/м и два опорных момента  $M_2 = -3,128$  кНм и  $M_3 = 5,071$  кНм (табл.14.3).

Расчетная схема этого элемента показана на рис. 18, г. Вначале вычислим опорные реакции, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_2 = -R_3 \cdot 3 - 5,071 - 3,128 + 2 \cdot \frac{3^2}{2} = 0;$$

$$\sum M_3 = R_2 \cdot 3 - 5,071 - 3,128 + 2 \cdot \frac{3^2}{2} = 0,$$

откуда  $R_2 = 5,733$  кН и  $R_3 = 0,267$  кН.

Проверим правильность вычисления опорных реакций, составив уравнения равновесия:

$$\sum y = R_2 + R_3 - q \cdot 3 = 5,733 + 0,267 - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Определим координату  $z_{ext}$  сечения, в котором  $Q = 0$ , а  $M = M_{ext}$ , используя следующую дифференциальную зависимость:

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z) = R_2 - qz = 0$$

откуда

$$z = z_{ext} = \frac{R_2}{q} = \frac{5,733}{2} = 2,8665 \text{ м.}$$

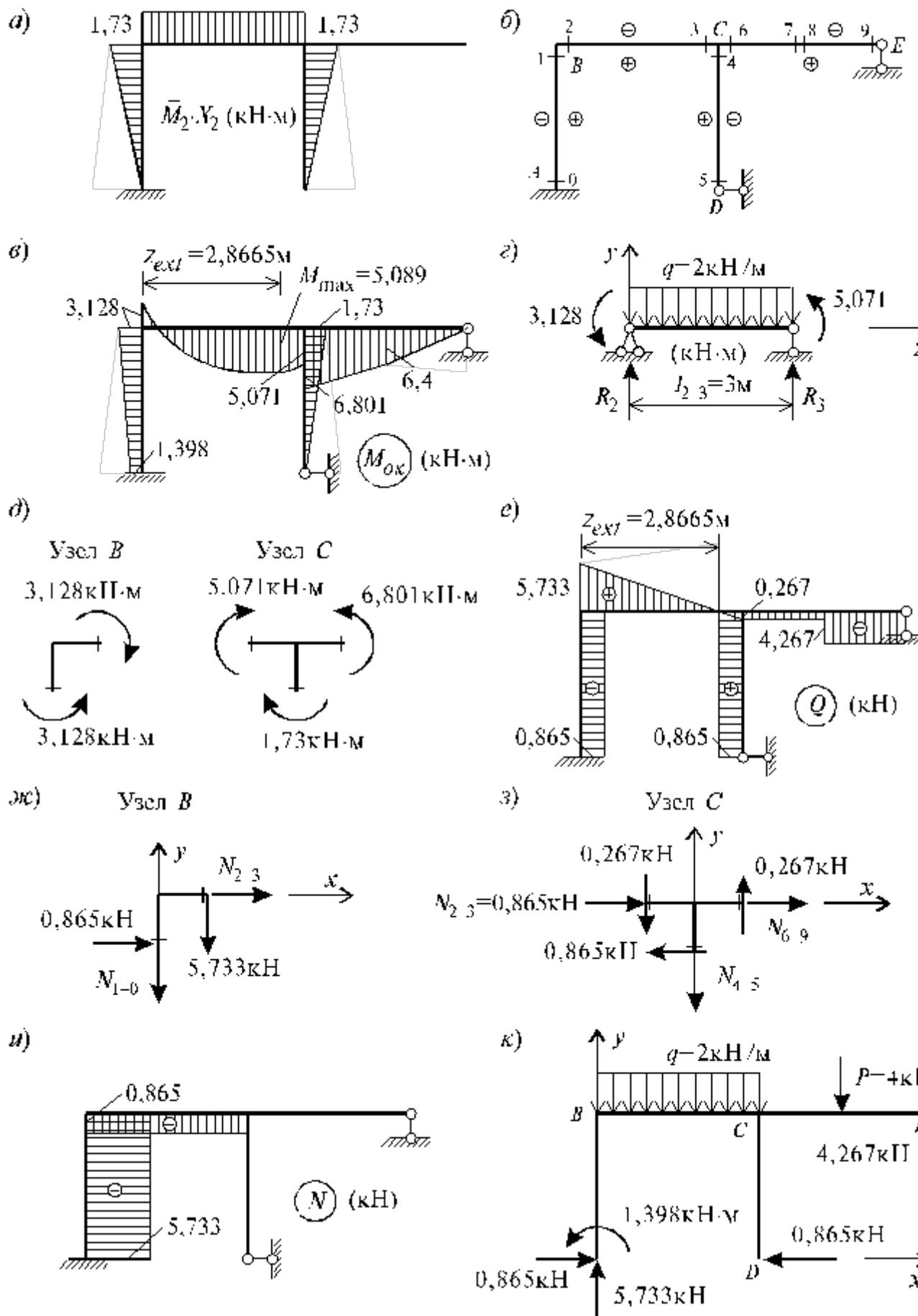


Рис. 18

Тогда для этого сечения получим:

$$M_{ext} = R_2 z_{ext} - \frac{q z_{ext}^2}{2} - 3,128 = 5,733 \cdot 2,8665 - \frac{2 \cdot 2,8665^2}{2} - 3,128 = 5,099 \text{ кНм.}$$

По найденным значениям ординат строим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_{ок}$  для заданной рамы (рис. 18, в).

#### 8. Проверка правильности построения эпюр $M_{ок}$ и $Q(z)$

Для проведения статической проверки вырезаем жесткие узлы рамы кроме опорных, прикладываем все действующие в них моменты и проверяем условия равновесия  $\sum M_{уз} = 0$

В нашем примере вырежем узлы  $B$  и  $C$  (рис. 18, д) и проверим их равновесие.

$$\text{Узел } B: \sum M_{уз} = 3,128 - 3,128 = 0$$

$$\text{Узел } C: \sum M_{уз} = 5,071 + 1,73 - 6,801 = 0$$

Условия равновесия узлов  $B$  и  $C$  выполняются. Выполнение условия равновесия узлов является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности определения  $M_{ок}$  является выполнение деформационной проверки заданной системы с применением эпюры  $M_{ок}$ , суть которого заключается в доказательстве отсутствия перемещения в точках и по направлению каждой отброшенной связи, т.е.:

$$\Delta_s = \sum_{j=1}^k \int \frac{M_{ок} \cdot M_s}{EI_j} dx = 0.$$

Эта проверка хотя и не имеет физического смысла, так как складываются различные по направлению перемещения, но она дает возможность доказать правильность построения  $M_{ок}$  во всех сечениях заданной системы.

Для удобства вычислений целесообразно расчленить криволинейную эпюру  $M_{ок}$  на участке рамы 2–3 (рис. 18, в) на трапецидальную и параболическую (подобно приведенному выше на рис. 15). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_s = & -\frac{1}{EI_c} \cdot \frac{2}{6} \cdot [2 \cdot (1,4 \cdot 6 + 3,128 \cdot 4) + 3,128 \cdot 6 + 1,4 \cdot 4] + \\ & + \frac{3 \cdot 2,25}{3EI_p} \cdot (4 + 1) + \frac{3}{6EI_p} [2 \cdot (-3,128 \cdot 4 + 5,071 \cdot 1) - 3,128 \cdot 1 + 5,071 \cdot 4] + \\ & + \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,73 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1,5}{6EI_p} [2 \cdot (6,8 \cdot 3 + 6,4 \cdot 1,5) + 6,8 \cdot 1,5 + 6,4 \cdot 3] + \\ & + \frac{1}{EI_p} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,4 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \approx 0. \end{aligned}$$

Ординаты эпюры  $Q(z)$  определяем используя зависимость  $Q(z) = dM(z)/dz$  или записывая в конечных разностях:

$$Q(z) = Q^0(z) + \frac{M_{конеч} - M_{нач}}{l} \quad (14.17)$$

где  $Q^0(z)$  – поперечная сила в сечениях с координатой  $z$  по длине участка, имеющего расчетную схему в виде простой двухопорной балки, загруженной заданной внешней нагрузкой (рис. 18, з).

Участок 0–1. На этом участке внешняя нагрузка отсутствует, поэтому  $Q^0(z) = 0$ , и  $Q_{0-1}$  определяем по формуле (14.17):

$$Q_{0-1} = \frac{-3,128 - (-1,398)}{2} = -0,865 \text{ кН.}$$

Участок 2–3. В этом случае при наличии нагрузки  $q = 2 \text{ кН/м}$  имеем:

$$Q_{2-3} = \frac{ql}{2} - qz + \frac{5,071 - (-3,128)}{3} = 3 - 2z + 2,733 = 5,733 - 2z$$

откуда при  $z = 0$ :  $Q_2 = 5,733 \text{ кН}$ ;

при  $z = l = 3 \text{ м}$ :  $Q_3 = 5,733 - 6 = -0,267 \text{ кН}$ .

$$\text{Участок 4–5. } Q_{4-5} = \frac{1,73 - 0}{2} = 0,865 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок 6–7. } Q_{6-7} = \frac{-6,4 - (-6,801)}{1,5} = 0,267 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок 8–9. } Q_{8-9} = \frac{0 - 6,4}{1,5} = -4,267 \text{ кН.}$$

По найденным значениям ординат строим эпюру  $Q$  (рис. 18, е).

### 9. Построение эпюры $N$

Ординаты эпюры продольных сил определяем из условий равновесия  $\sum z = 0$  и  $\sum y = 0$  узлов рамы, вырезанных из эпюры  $Q$ . При этом отрицательную поперечную силу направляем так, чтобы она вращала вырезанный узел против хода часовой стрелки, а положительную – по ходу часовой стрелки. Нормальные силы направляем от узла, т.е. предполагаем, что стойка и ригель растянуты.

Вырезав узел  $B$  (рис. 18, ж), составим уравнения равновесия:

$$\sum z = 0; N_{2-3} + 0,865 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -0,865 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; N_{1-0} - 5,733 = 0 \Rightarrow N_{1-0} = -5,733 \text{ кН.}$$

Знак «минус» говорит о том, что направления продольных усилий ригеля и стойки были приняты неверно. Поэтому в действительности ригель и стойка не работают на растяжение, а на сжатие.

Из рассмотрения равновесия узла  $C$  (рис. 18, з) следует:

$$\sum z = 0; N_{6-9} - 0,865 + 0,865 = 0 \Rightarrow N_{6-9} = 0;$$

$$\sum y = 0; -N_{4-5} - 0,267 + 0,267 = 0 \Rightarrow N_{4-5} = 0.$$

По вычисленным значениям ординат для каждого участка строим эпюру  $N$  (рис. 18, и).

### 10. Статическая проверка рамы в целом

Статическая проверка рамы в целом производится для подтверждения правильности построения эпюр  $Q$ ,  $N$  и  $M_{ок}$ . Она заключается в проверке равновесия рамы в целом или любой отсеченной ее части, т.е. проверке удовлетворения условий равновесия  $\sum z = 0$ ;  $\sum y = 0$ ;  $\sum M_A = 0$  под воздействием внешних нагрузок и внутренних усилий, возникающих в местах проведенных сечений.

Для выполнения этой проверки отсечем заданную раму от всех опор и заменим их действие возникающими в этих сечениях внутренними усилиями  $Q$ ,  $N$  и  $M$  (рис. 18, к), значения которых определяются по эпюрам  $Q$ ,  $N$  и  $M_{ок}$ . Направление всех внутренних усилий при этом должно соответствовать их знаку. Следовательно:

$$\sum z = 0; 0,865 - 0,865 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\sum y = 0; 5,733 + 4,267 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; 1,3 \cdot 8 + \frac{2 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 4,5 - 4,267 \cdot 6 = -27 + 27 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, рама рассчитана верно.

## Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости

Использование метода сил для расчета систем с высокой степенью статической неопределимости связано с решением совместной системы большого количества линейных уравнений. Даже самый экономичный метод решения таких систем – алгоритм Гаусса – требует  $n^3$  вычислительных операций (где  $n$  – число уравнений, т.е. степень статической неопределимости системы), при условии, что все коэффициенты системы отличны от нуля. В связи с этим нужно стремиться так выбрать основную систему, чтобы возможно большее число побочных единичных перемещений  $\delta_{ik}$ , ( $i \neq k$ ) и свободных членов  $\Delta_{iF}$  обратилось в ноль.

Основным средством для достижения этой цели является использование симметрии. Стержневая система является симметричной, если симметричны не только оси и опорные закрепления (геометрическая симметрия), но и жесткости (упругая симметрия). При этом внешняя нагрузка может быть и несимметричной.

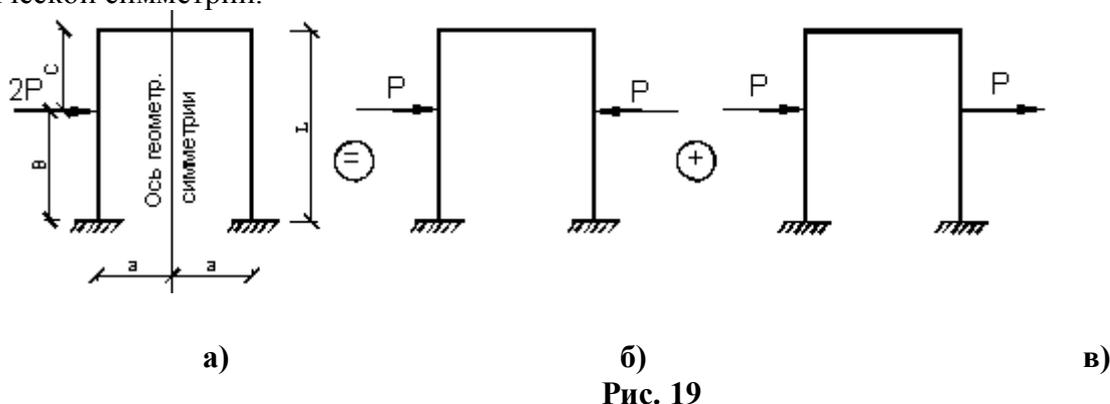
При выборе основной системы лишние неизвестные следует выбирать в виде симметричных и обратно симметричных усилий. Симметричные неизвестные создают симметричные эпюры моментов, а обратно симметричные неизвестные – кососимметричные эпюры. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, т.е. результат их перемножения равен нулю:

$$\delta_{ik} = \sum_1^n \int_{s_0}^{s_1} \frac{M_i M_k}{EI} ds = 0 \quad (14.18)$$

Ортогонализация эпюр может достигаться различными способами:

1) выбор симметричной основной системы; 2) выбор симметричных и обратносимметричных неизвестных; 3) группировка неизвестных; 4) устройство жестких консолей (способ упругого центра); 5) использование статически неопределимой основной системы; 6) разложение произвольной нагрузки на симметричную и обратносимметричную составляющие.

Рассмотрим раму, имеющую ось геометрической симметрии (рис.19, а). Заменяем внешнюю нагрузку ей статически эквивалентной, такой, что она представляет сумму симметричной (рис.19, б) и кососимметричной (рис.19, в) нагрузок относительно оси геометрической симметрии.



Аналогично можно классифицировать внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержневой системы (рис.20).

Изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , нормальная сила  $N$  являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости поперечного сечения. Эти внутренние

силловые факторы назовём симметричными. Остальные (перерезывающие силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящий момент  $M_z$ ) назовём антисимметричными или кососимметричными силловыми факторами.

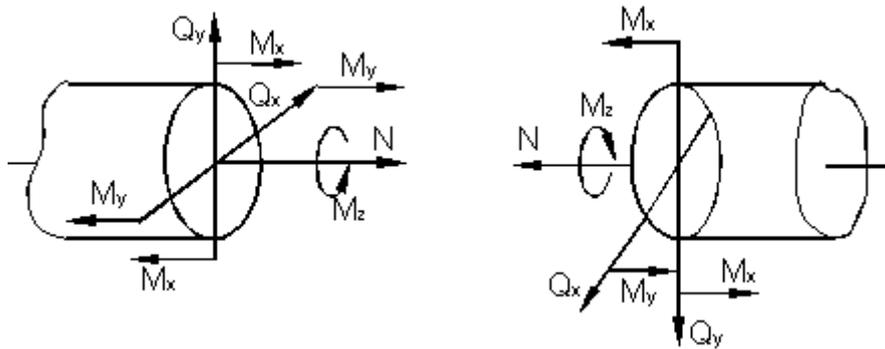


Рис. 20

Докажем теперь положение:

*у геометрически симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные внутренние силловые факторы, а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силловые факторы (рис.21).*

Канонические уравнения метода сил для изображённой на рис.19 трижды статически неопределимой рамы имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (14.19)$$

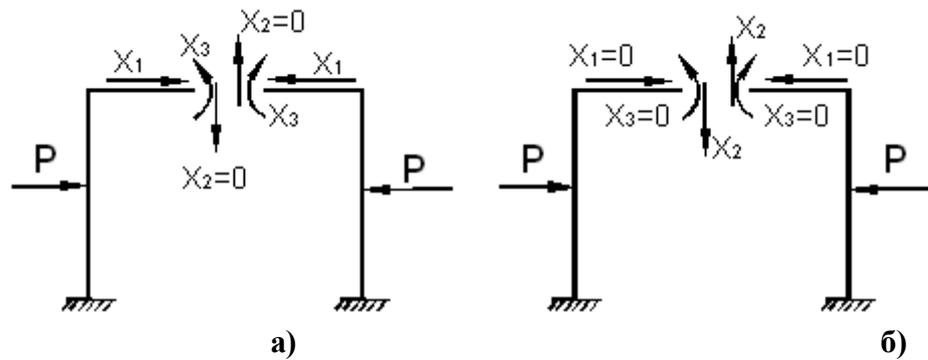


Рис. 21

На рис. 22 приведены эпюры изгибающих моментов от единичных сил.

На основании этих эпюр находим:

$$\begin{cases} EJ \delta_{12} = \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)a - \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)a \equiv 0, \\ EJ \delta_{23} = -(l \cdot a)1 + (l \cdot a)1 - \left(\frac{1}{2}a \cdot a\right)1 + \left(\frac{1}{2}a \cdot a\right)1 \equiv 0. \end{cases}$$

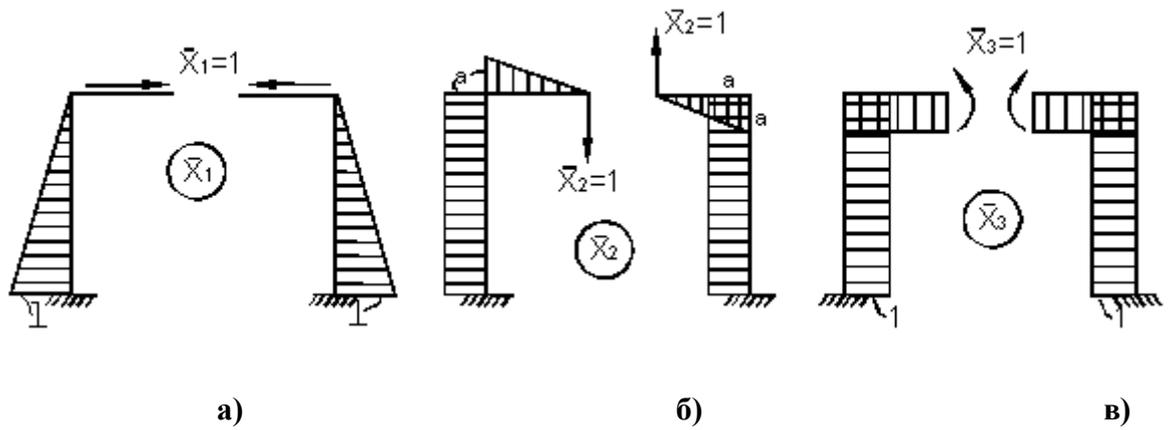


Рис. 22

Следовательно, канонические уравнения (14.19) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (14.20)$$

На рис. 23 приведены эпюры моментов от внешних симметричной (рис.23, а) и косимметричной (рис.23, б) нагрузок.

В первом случае симметричной внешней нагрузки имеем:

$$EJ\Delta_2(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a = 0.$$

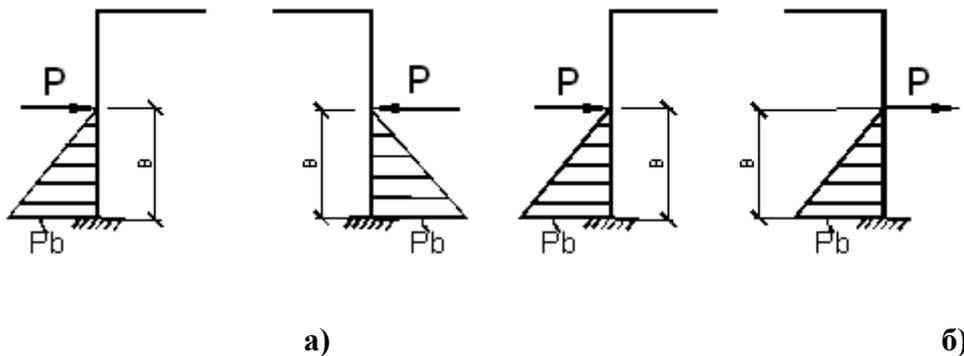


Рис. 23

Из (14.20) следует  $X_2 = 0$ , т.е. при симметричной внешней нагрузке обращается в нуль косимметричный силовой фактор (перерезывающая сила), что и требовалось доказать.

Во втором случае косимметричной внешней нагрузки имеем:

$$\begin{cases} EJ\Delta_1(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) \equiv 0, \\ EJ\Delta_3(P) = -\left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)1 + \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)1 \equiv 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения (14.20) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = 0, \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0. \end{cases} \quad (14.21)$$

Т.к. определитель системы двух первых уравнений (14.21)

$$|\delta| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2 \neq 0,$$

то  $x_1 = x_3 = 0$ , что и требовалось доказать.

Полученные результаты могут быть распространены на пространственные стержневые системы.

## ***Расчет неразрезной балки методом сил. Уравнение трех моментов***

***Неразрезной балкой*** называется статически неопределимая балка, опирающаяся в пролете на конечное число шарнирных опор. Крайние сечения неразрезной балки могут быть свободны, заделаны или шарнирно оперты. Одна из опор неразрезной балки имеет связь, препятствующую смещению балки вдоль ее оси.

Расчет неразрезной балки (рис. 24, *а*) можно выполнить, как и любой статически неопределимой системы методом сил. Основную систему для расчета неразрезной балки получим, удалив из нее связи, препятствующие взаимному повороту смежных сечений балки над ее опорами, т.е. поместив шарниры в опорных сечениях балки (рис. 24, *б*).



Подсчитаем единичные и грузовые коэффициенты, применяя правило Верещагина «перемножения» эпюр:

$$\begin{aligned}\delta_{n,n-1} &= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EI_n}; \\ \delta_{n,n} &= \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot l_{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot \left( \frac{l_n}{6EI_n} + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} \right); \\ \delta_{n,n+1} &= \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot l_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}; \\ \Delta_{n,p} &= \frac{1}{EI_n} \cdot \Omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \cdot \Omega_{n+1} \cdot \frac{b_n}{l_{n+1}}.\end{aligned}\tag{14.23}$$

Подставим найденные коэффициенты в (14.22), получим:

$$\begin{aligned}\frac{l_n}{6EI_n} \cdot X_{n-1} + 2 \cdot \left( \frac{l_n}{6EI_n} + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} \right) \cdot X_n + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} \cdot X_{n+1} = \\ = - \frac{\Omega_n \cdot a_n}{EI_n \cdot l_n} - \frac{\Omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{EI_{n+1} \cdot l_{n+1}}.\end{aligned}\tag{14.24}$$

В случае балки постоянного сечения  $J_1 = J_2 = \dots = J_n = J_{n+1}$  и введя обозначения  $X_{n-1} = M_{n-1}$ ;  $X_n = M_n$ ;  $X_{n+1} = M_{n+1}$ , получим:

$$M_{n-1} l_{n-1} + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6\Omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}.\tag{14.25}$$

Это и есть **уравнение трех моментов** для неразрезной балки постоянного сечения. В этом уравнении неизвестными являются изгибающие моменты на опорах. Если у неразрезной балки все опоры шарнирные, то таких уравнений можно составить столько, сколько у балки промежуточных опор.

При наличии на концах балки нагруженных консолей, изгибающие моменты на крайних опорах войдут в уравнение трех моментов, как известные величины, а при отсутствии консолей эти моменты будут равны 0.

Если конец неразрезной балки зашпелен, то для применения уравнения (14.25) необходимо, отбросив заделку, ввести с ее стороны дополнительный пролет  $l_0 = 0$  (рис.25). Такая система будет деформироваться также, как балка с жесткой заделкой.

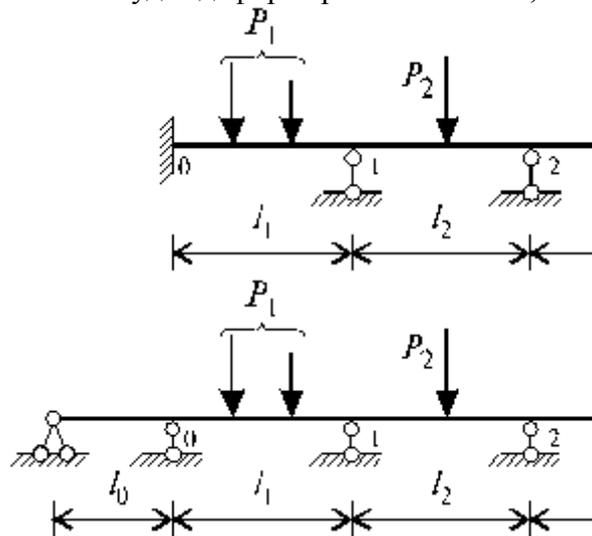


Рис. 25

Решая совместно, составленные таким образом уравнения, найдем все неизвестные изгибающие моменты на опорах. Далее для построения эпюр  $M$  и  $Q$ , каждый пролет неразрезной балки рассматриваем как балку на двух шарнирных опорах, нагруженных внешней нагрузкой и двумя опорными моментами. Ординаты эпюр могут быть подсчитаны по формулам:

$$M = M_P^o + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n}, \quad (14.26)$$

где  $M_P^o$  и  $Q_P^o$  – ординаты эпюр  $M$  и  $Q$  от внешней нагрузки в основной системе.

Чтобы убедиться в правильности построения эпюр  $M$  и  $Q$  необходимо провести проверку равновесия неразрезной балки по уравнениям:  $\sum y = 0$ ;  $\sum M = 0$ .

Для этого следует определить вертикальные опорные реакции неразрезной балки, используя эпюру  $Q$ :

$$R_n = Q_n^{слева} - Q_n^{справа} \quad (14.27)$$

## Метод перемещений

При расчёте статически неопределимых систем методом сил сначала находятся лишние неизвестные, затем внутренние силовые факторы и перемещения.

Можно решить задачу раскрытия статической неопределимости иначе: сначала найти перемещения характерных точек упругой системы, а затем внутренние силовые факторы. Метод перемещений отличается от метода сил тем, что за основные неизвестные принимаются перемещения узлов стержневой системы (углы поворота и линейные перемещения). Поэтому особенно просто раскрывается статическая неопределимость системы с малым числом узлов.

Стержневые деформируемые системы обладают конечным числом степеней свободы, которое совпадает с числом независимых перемещений узлов. Для плоской системы в общем случае каждый жесткий узел имеет три степени свободы (одно угловое перемещение и два линейных).

Если известны перемещения узлов, то можно найти перемещения любой точки стержневой системы. Общее число неизвестных перемещений  $n$  метода перемещений, называемое степенью кинематической неопределимости, определяем как сумму неизвестных углов поворота  $n_y$  и неизвестных линейных перемещений  $n_x$ :

$$n = n_y + n_x$$

Число неизвестных углов поворота равно числу жестких узлов. При определении линейных смещений предполагается, что при изгибе сближением концов стержней можно пренебречь. В силу этого предположения число независимых линейных перемещений узлов равно степени свободы шарнирной схемы системы, получаемой путём введения шарниров во все узлы, включая опорные.

В качестве примера рассмотрим порталную раму на рис.26.

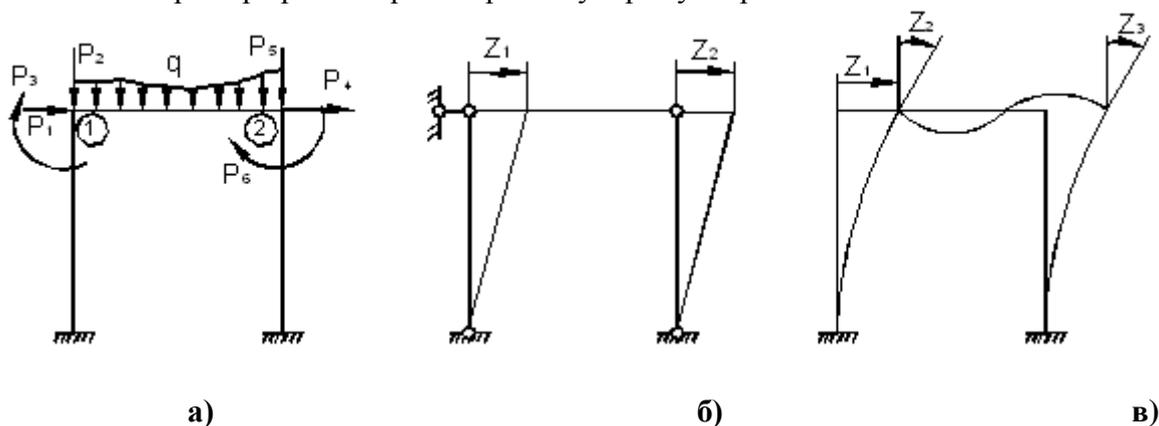


Рис. 26

Внешние моменты в узлах считаем положительными при их вращении по часовой стрелке. Это же правило принимаем для углов поворота узлов. Рама три раза статически неопределима. Число жёстких узлов  $n_{уз} = 2$ . Чтобы найти  $n_a$ , заменим все жёсткие узлы и жёсткие защемления шарнирами и превратим систему в геометрически изменяемую, т.е. механизм (рис.26, б). Число независимых линейных перемещений определится как число простых связей, которые необходимо наложить на шарнирную схему конструкции, чтобы сделать её геометрически неизменяемой. В данном примере  $n_a = 1$  (рис.26, б). Таким образом, число неизвестных перемещений  $n = 2 + 1 = 3$ , т.е. столько же, сколько и по методу сил.

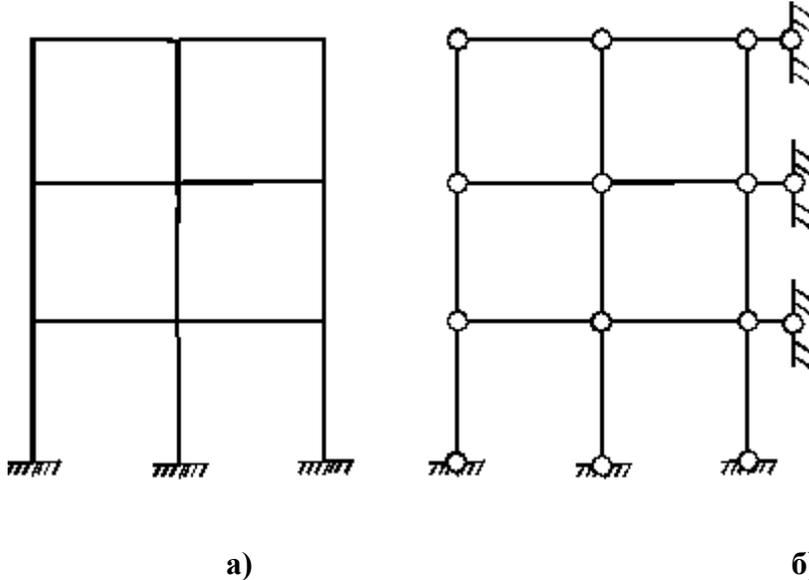


Рис. 27

Усложним раму (рис.27), число узлов  $n_{уз} = 9$ , число простых дополнительных внешних связей  $n_a = 3$ . Следовательно, число неизвестных перемещений по методу перемещений  $n = 9 + 3 = 12$ . По методу сил число неизвестных  $n = (9 - 3) + 4 \cdot 3 = 18$ .

Рассмотрим раму (рис.26, а) и нагрузим её обобщёнными силами  $P_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) в узлах и распределённой нагрузкой интенсивности  $q$ , либо сосредоточенными силами  $P$  в пролётах такую стержневую систему называют *заданной*. В соответствии с законом Гука

$$z_i = \sum \delta_{ij} P_j + \Delta_i(P, q), \tag{14.28}$$

решая уравнение (14.28) относительно сил  $P_i$ , получим выражение для узловой нагрузки:

$$P_i = \sum r_{ij} z_j + R_i(P, q). \tag{14.29}$$

Если узловой нагрузки  $P_i$  нет, либо она отнесена к внешней нагрузке, то из (14.29) следует:

$$P_i = \sum r_{ij} z_j + R_i(P, q) = 0, \tag{14.30}$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n + R_1 = 0, \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n + R_2 = 0, \\ \dots \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n + R_n = 0. \end{cases}$$

Система (14.30) называется **канонической системой уравнений метода перемещений**, причём  $r_{ij} = r_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), что следует из теоремы о взаимности перемещений. При отсутствии поперечной нагрузки  $R(P, q) = 0$ .

Выясним статический смысл коэффициентов  $r_{ij}$ , называемых **коэффициентами жёсткости**. Дадим, например узлам системы (рис. 28, а) перемещения  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = z_3 = 0$ . Тогда из (14.30) следует:

$$R_1 = r_{11}, R_2 = r_{22}, R_3 = r_{31}.$$

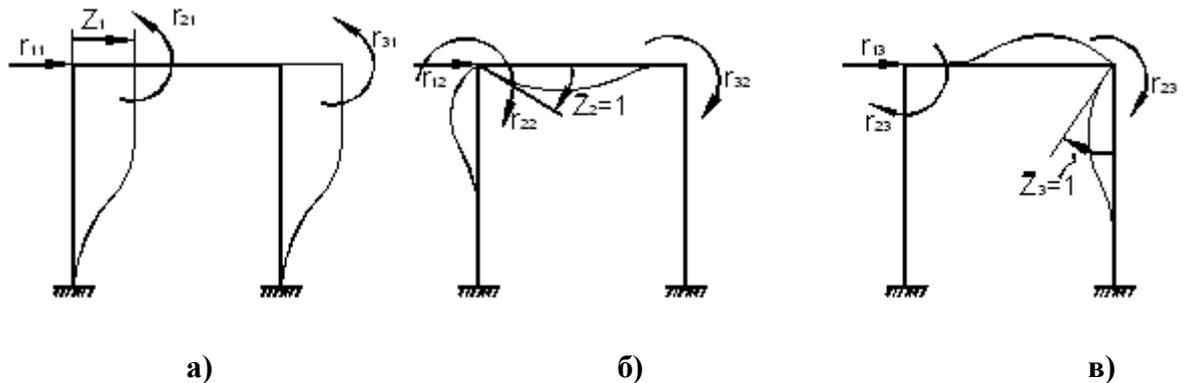


Рис. 28

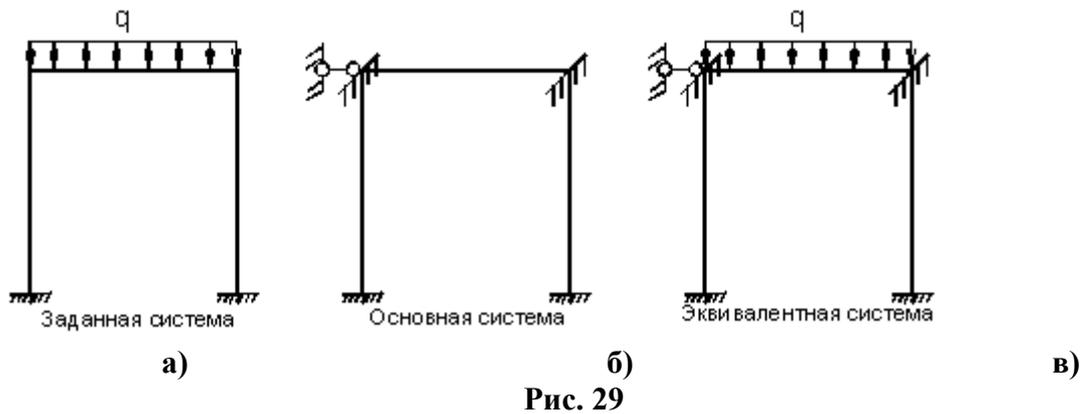
Таким образом,  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  – это обобщённые силы, которые нужно приложить в узлах в направлении неизвестных перемещений, чтобы получить единичное перемещение узла  $z_1 = 1$ .

Аналогично выясняется смысл остальных коэффициентов жёсткости  $r_{ij}$ . Итак,  $r_{ij}$  – это обобщённые силы, приложенные в узлах номер  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при единичном перемещении  $z_j = 1$ , т.е. узла  $j$ . Такая трактовка справедлива только для упругих систем.

На основании теоремы о взаимности работ имеем  $A_{ij} = A_{ji}$ , где  $A_{ij}$  – работа сил  $i$ -го состояния на перемещение точек их положения, вызванных силами  $j$ -го состояния,  $A_{ji}$  – наоборот. Согласно этой теореме  $A_{ij} = r_{ij} \cdot 1$ ,  $A_{ji} = r_{ji} \cdot 1$  и потому  $r_{ij} = r_{ji}$ , причём

$$A_{ij} = r_{ji} = \sum \int M_j d\theta_i = \sum \int \frac{M_j M_i}{EJ} dz,$$

где  $M_i$  – моменты от единичных смещений.



Представим теперь, что мы наложили дополнительные связи в узлах от их поворота или линейных смещений. Тогда рама превращается в совокупность однопролётных балок с жёстко защемлёнными или шарнирно опёртыми концами (рис. 29). Такая система носит название *основной системы метода перемещений*. Если к основной системе приложить внешние силы (рис. 29, в), то получим систему *эквивалентную* заданной на основании принципа независимости действия сил.

Пусть теперь внешняя нагрузка отсутствует. Будем придавать узлам основной системы единичные смещения  $z_i = 1$ . Тогда на основании рис. 28  $r_{ij}^{(v)}$  можно трактовать как реактивные обобщённые силы в упругих защемлениях узлов. Легко усмотреть, что при таком подходе стержневую систему действительно можно рассматривать как систему однопролётных статически определимых балок, концы которых упруго защемлены в узлах, лишённых линейных перемещений благодаря простым внешним связям (рис. 29).

Приложим теперь к основной системе внешнюю внутрипролётную нагрузку (рис. 29, в). Так как при этом все  $z_j = 0$ , то из (14.30) следует, что  $P_i = R_i \neq 0$ , т.е.  $R_i$  будут представлять собой опорные реакции от внешней нагрузки внутри пролётов. Система будет эквивалентна заданной, если дополнительные связи будут упругими и допускать действительные перемещения, имеющие место в данной системе. Этого можно добиться, если приравнять к нулю реакции всех введённых дополнительных связей, которые препятствуют поворотам и линейным смещениям ( $R_i = 0$ ). Эту мысль и выражают собой канонические уравнения (14.30).

Методика определения коэффициентов  $r_{ij}^{(v)}$  подробно излагается в курсах строительной механики. Реакции  $R_i$  в балках определяются обычно по методу Мора. На рис.30 эти реакции и эпюры моментов указаны для некоторых видов изгиба. Значения коэффициентов (реакций)  $r_{ij}^{(v)}$  при единичных смещениях можно найти следующим образом. Общее решение дифференциального уравнения изгиба балки

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = 0,$$

после интегрирования имеет вид

$$w = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4, \quad \theta = \frac{dw}{dz} = 3C_1 z^2 + 2C_2 z + C_3.$$

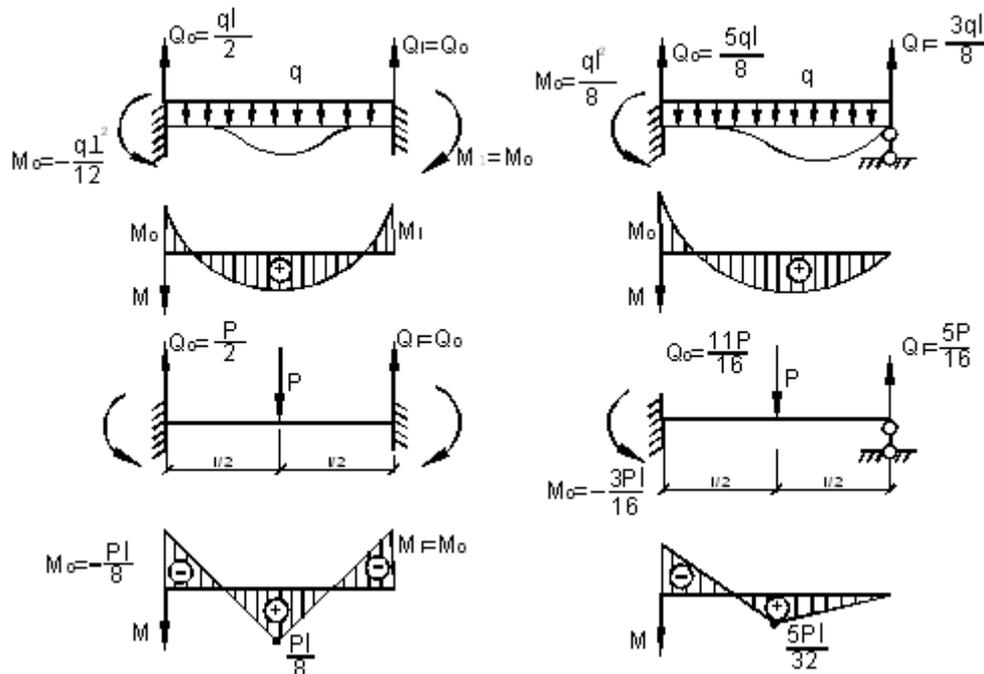


Рис. 30

При  $z = 0$  прогиб  $w = w_0, \theta = \theta_0$ , а при  $z = l$  прогиб  $w_1 = w_0 + \Delta, \theta = \theta_1$ , поэтому

$$\begin{cases} C_4 = w_0, C_3 = \theta_0, \\ w_1 = C_1 l^3 + C_2 l^2 + \theta_0 l + w_0, \\ \theta_1 = 3C_1 l^2 + 2C_2 l + \theta_0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим постоянные:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\theta_0}{l^2} + \frac{\theta_1}{l^2} - \frac{2(w_1 - w_0)}{l^3}, \\ C_2 = -\frac{2\theta_0}{l} - \frac{\theta_1}{l} + \frac{3(w_1 - w_0)}{l^2}. \end{cases}$$

Внутренние силовые факторы:

$$\begin{cases} M = -EJw'''' = -EJ(GC_1 z + 2C_2), \\ Q = \frac{dM}{dz} = -6EJC_1 = const, \\ M_0 = -2EJC_2, M_1 = -EJ(6C_1 l + 2C_2). \end{cases}$$

Подставляя значение постоянных, находим:

$$\begin{cases} M_0 = \frac{4EJ}{l} \theta_0 + \frac{2EJ}{l} \theta_1 - \frac{6EJ}{l^2} \Delta, \\ M_1 = -\frac{2EJ}{l} \theta_0 - \frac{4EJ}{l} \theta_1 + \frac{6EJ}{l^2} \Delta, \\ Q = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_0 - \frac{6EJ}{l^2} \theta_1 + \frac{12EJ}{l^2} \Delta, \end{cases} \quad (14.31)$$

где  $\Delta = w_1 - w_0$ .

Если правая опора шарнирная, то  $M_1 = 0$ , что, согласно (14.31), позволяет найти:

$$\theta_1 = -\frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{2}(w_1 - w_0), \quad (14.32)$$

а затем

$$M_0 = \frac{3EJ}{l} \theta_0 - \frac{3EJ}{l^2} (w_i - w_0),$$

$$Q = -\frac{3EJ}{l^2} \theta_0 + \frac{3EJ}{l^3} (w_i - w_0).$$

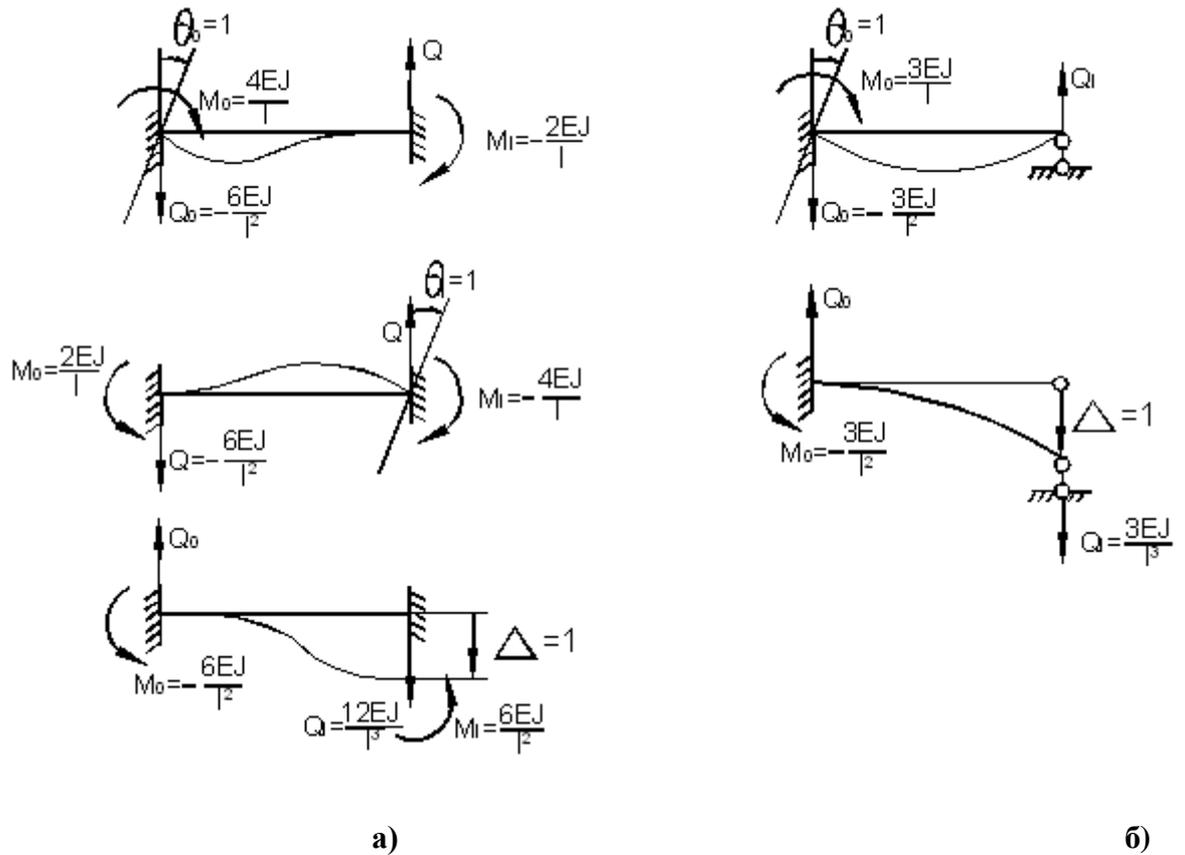


Рис. 31

На рис. 31 показаны реакции  $r_{\psi}^i$  от единичных перемещений  $\theta_0 = 1, \theta_i = 1, \Delta = w_i - w_0 = 1$ , согласно (14.31), (14.32). Зная реакции в опорах от единичных перемещений, можно найти коэффициенты  $r_{\psi}^i$  из условий равновесия узлов или частей рамы.

Решая далее систему канонических уравнений (14.30), находим неизвестные перемещения  $z_i$ . Зная последние по формулам

$$M_0 = M_{0p} - \frac{EJ}{l} \left[ 4\theta_0 + 2\theta_i - 6\frac{\Delta}{l} \right],$$

$$M_i = M_{ip} - \frac{EJ}{l} \left[ 2\theta_0 + 4\theta_i - 6\frac{\Delta}{l} \right]$$

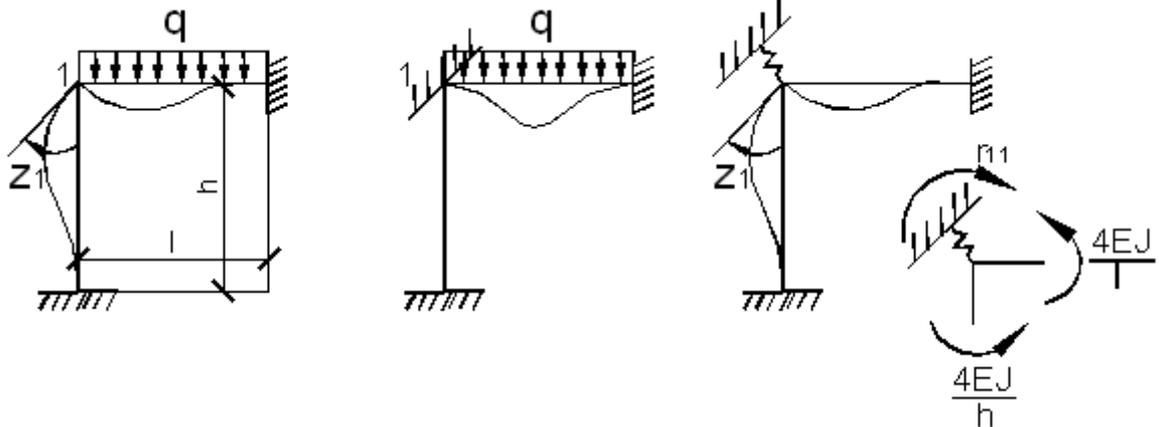
либо

$$M = M_p + \sum z_i M_i, \tag{14.33}$$

находим изгибающие моменты в узлах рамы и строим эпюру моментов.

**Примеры расчёта стержневых систем методом перемещений**

**Пример 1.**  
Рассмотрим трижды статически неопределимую систему (рис. 32, а).



а) Заданная система  
состояние системы

б) Основная система

в) Единичное

Рис. 32

Степень кинематической неопределимости задачи  $n = 1$ . Известных перемещений – одно. Это поворот узла  $z_1$ . Каноническое уравнение метода перемещений:

$$r_{11}z_1 + R_{1p} = 0. \quad (14.34)$$

Введём защемление узла. В результате получаем основную систему метода. Реактивный момент в левом защемлении, согласно рис. 32,а, равен:

$$R_{1p} = \frac{ql^2}{12}.$$

Превратим теперь защемление в узловое и повернём узел 1 на единичный угол  $z = 1$  (рис. 32, в).

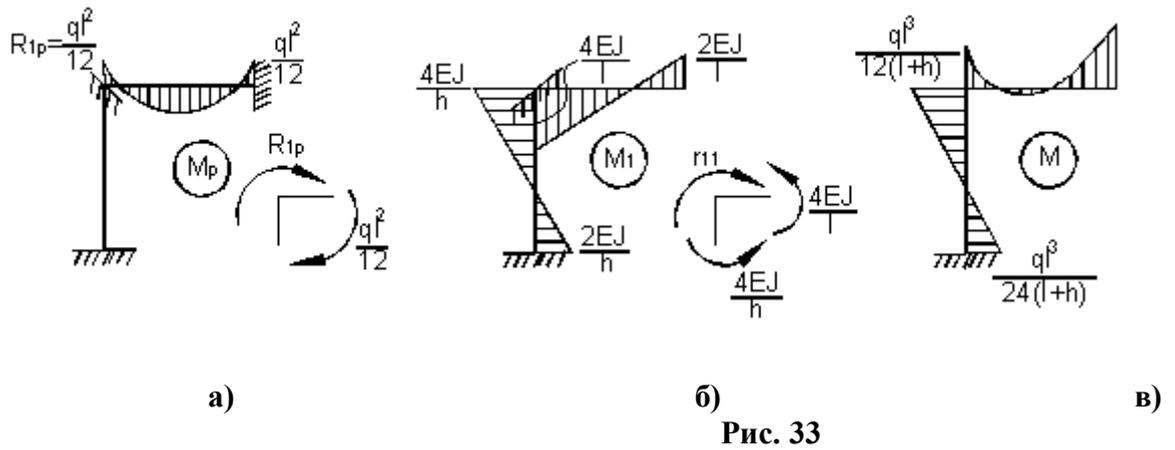
Согласно рис. 31,а в примыкающих к узлу стержнях на их концах возникают моменты  $\frac{4EJ}{h}$  и  $\frac{4EJ}{l}$  (рис. 33, б). Из равновесия узла находим:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{h} + \frac{4EJ}{l}.$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в каноническое уравнение (14.34), получим:

$$z = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{ql^2}{48\left(\frac{EJ}{h} + \frac{EJ}{l}\right)}.$$

Эпюры от внешней нагрузки в основной системе и от единичного смещения показаны на рис. 33,а,б.



Используя формулу (14.32) находим узловые моменты и строим суммарную эпюру моментов (рис. 33,в).

### Пример 2.

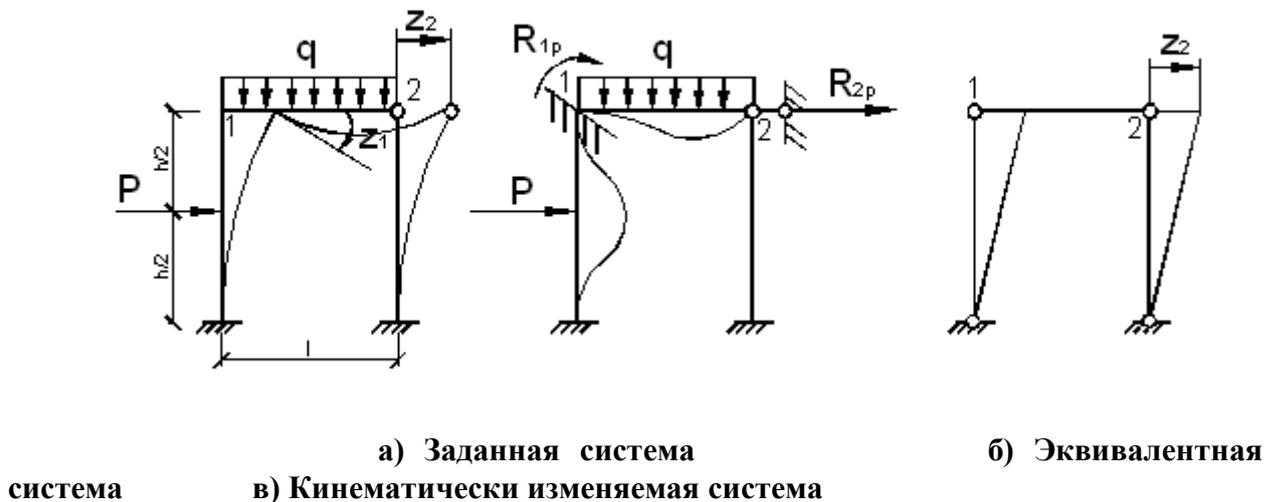
Рассмотрим два раза статически неопределимую раму (рис. 34, а). Степень статической неопределимости рамы  $n = 2$ , ибо она имеет два независимых перемещения узлов: угол поворота узла 1 и линейное перемещение узла 2 (рис. 34, а,б). Соответствующие канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases} \quad (14.35)$$

Заданная и эквивалентная системы задачи и единичные состояния изображены на рис. 34. Эпюры моментов от внешней нагрузки в основной системе изображены на рис.35,а. Эпюры моментов от единичных смещений представлены на рис. 35.

Из условий равновесия узла 1 в каждом из состояний находим:

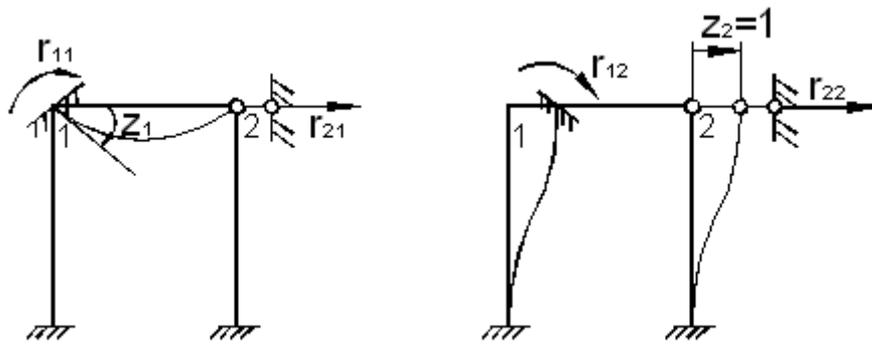
$$R_{1p} = \frac{Ph}{8} - \frac{ql^2}{8}, r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}, r_{12} = r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$



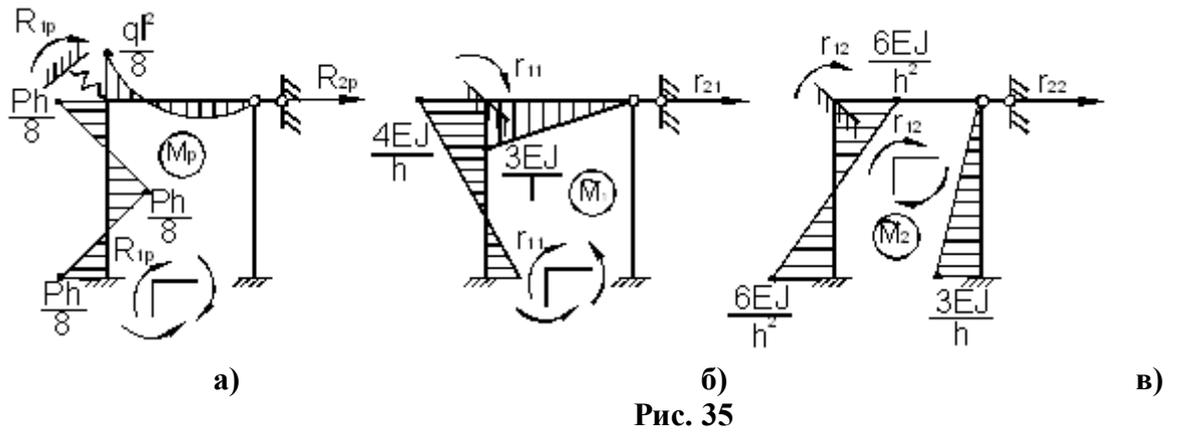
система

а) Заданная система  
в) Кинематически изменяемая система

б) Эквивалентная



г) Первое единичное состояние      д) Второе единичное состояние  
Рис. 34



а)      б)      в)  
Рис. 35

Для определения коэффициентов  $R_{2p}, r_{22}$  рассмотрим равновесие отсечённых частей рамы (рис. 36). Из уравнений равновесий находим:

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}, r_{21} = \frac{12EJ}{h^2}, r_{22} = \frac{12EJ}{h^3} + \frac{3EJ}{h^3} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

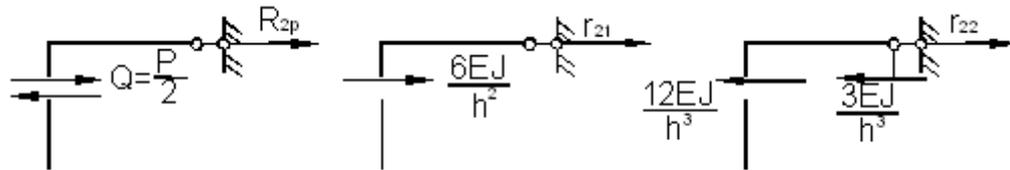


Рис. 36

Канонические уравнения задачи (14.35) принимают вид

$$\begin{cases} \left( \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} \right) z_1 - \frac{6EJ}{h^2} z_2 + \left( \frac{Ph}{8} - \frac{ql^2}{8} \right) = 0, \\ -\frac{6EJ}{h^2} z_1 + \frac{15EJ}{h^3} z_2 - \frac{P}{2} = 0. \end{cases}$$

Примем для простоты расчёта  $l = h$  и  $P = \frac{ql}{2}$ . Тогда получим:

$$7lz_1 - 6z_2 - \frac{ql^4}{16EJ} = 0,$$

$$-6lz_1 + 15z_2 - \frac{ql^4}{4EJ} = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{13ql^3}{15 \cdot 2EJ}, E_2 = \frac{17ql^4}{1128EJ}.$$

Далее по формуле  $M = M_1z_1 + M_2z_2 + M_p$  строим эпюру изгибающих моментов (рис. 37).

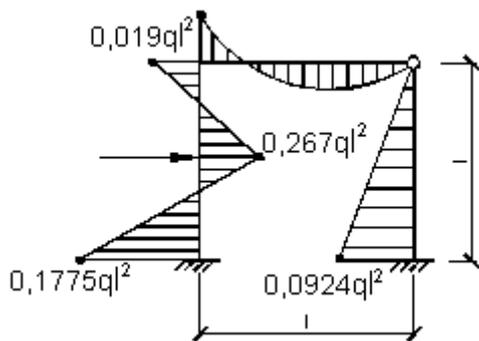


Рис. 37

## Вопросы для самопроверки

- Чем принципиально отличаются статически неопределимая балка от статически определимой?
- Какие методы могут быть использованы для расчета статически неопределимых балок?
- Как решают простейшие статически неопределимые балки?
- Как записывается уравнение трех моментов?
- Какие балки называют статически неопределимыми?
- Какой порядок расчета используется при решении статически неопределимых балок?
- Каким методом ведется проверка балки на жесткость?
- Запишите условие прочности балки по нормальным напряжениям?
- Объясните, как, используя условия прочности по нормальным напряжениям, подбираются балки из ГОСТа?
- Для чего и как проводится деформационная проверка при решении статически неопределимых балок?
- Как составляют канонические уравнения метода сил?
- В какой последовательности выполняют расчет статически неопределимой балки?
- Какие плоские рамы считаются статически неопределимыми?
- Какой метод расчета наиболее предпочтителен для расчета рам?
- Что понимается под выражением «каноническое уравнение» метода сил?
- Как определяется степень статической неопределимости рамы?
- Объясните смысловую сторону метода сил?
- Какой порядок расчета принят при решении статически неопределимых рам?
- Можно ли использовать метод сил при решении пространственных статически неопределимых рам?
- Как используют свойство симметрии рам при их решении?
- Какие проверки используются при решении рам?

- Какие эпюры строятся для статически неопределимых рам?
- Какие эпюры строятся для статически неопределимых кривых стержней?
- Какие эпюры строятся для пространственных систем?